مجله علمی پژوهشی «الکترومغناطیس کاربردی»
سال سوم، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۴؛ ص ۴۶- ۳۹

محاسبه تحلیلی منحنی پاشندگی ساختارهای متناوب یک بعدی مبتنی بر گرافین

پریسا کریمی خوزانی[۱]، امین خواصی[۲*]

۱- دانشجوی دکتری مهندسی برق، ۲- استادیار، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت: ۹۵/۱۱/۱۷، پذیرش: ۹۶/۰۳/۱۷)

چکیده: در این مقاله، روش تحلیلی جدیدی برای محاسبه منحنی پاشندگی ساختارهای متناوب یک‌بعدی مبتنی بر گرافین پیشنهاد می‌گردد. ساختار مورد بررسی آرایه‌ای از نوارهای گرافینی با پتانسیل شیمیایی مختلف است. در این روش با استفاده از ضرایب انتقال و بازتاب مربوط به برخورد یک موج پلاسمونی به یک ناپیوستگی در رسانندگی سطحی گرافین، ماتریس انتقال مربوط به یک سلول واحد از ساختار محاسبه می‌شود. سپس با اعمال شرط فلوکه، مودهای ساختار به کمک مقادیر ویژه این ماتریس به‌دست می‌آیند. از آن‌جا که مودهای ساختارهای چندلایه، قطب‌های ضرایب انتقال و بازتاب هستند، با مشاهده تغییرات فاز این ضرایب نیز می‌توان مودهای ساختار را تشخیص داد. ازاین‌رو، به منظور بررسی صحت و دقت روش پیشنهادی، منحنی پاشندگی به روش قطب بازتاب نیز محاسبه شده و با روش پیشنهادی مورد مقایسه قرار می‌گیرد. این مقایسه نشان می‌دهد که روش پیشنهادی با وجود سادگی و سرعت بالا از دقت خوبی نیز برخوردار است.

کلید واژه‌ها: گرافین، پلاسمونیک، ساختارهای متناوب، منحنی پاشندگی.

۱- مقدمه

گرافین ماده‌ای به ضخامت یک اتم است که از کنار هم قرار گرفتن اتم‌های کربن در شبکه‌ای شش‌ضلعی تشکیل شده است [۱]. گرافین به‌دلیل خصوصیات منحصربه‌فرد ساختاری نظیر عدم وجود گاف بین باند هدایت و باند ظرفیت و برقراری رابطه خطی بین انرژی و عدد موج، ویژگی‌های جالبی از خود بروز می‌دهد. گرافین به‌دلیل رسانایی گرمایی و الکتریکی بالا و استحکام زیاد مکانیکی، در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری قرار گرفته است و به‌دلیل ایجاد امکانی برای انتشار پلاسمون‌های سطحی در محدوده فرکانس‌های تراهرتز، در طراحی و ساخت بسیاری از وسایل میکرو و نانوالکترونیکی از جمله موجبر، فیلتر و جاذب به‌کار رفته است. مهم‌ترین ویژگی گرافین در مقایسه با فلزات، قابلیت کنترل‌پذیری آن است؛ چون تحرک حامل‌های بار در گرافین از طریق اعمال ولتاژ بایاس الکتریکی قابل تغییر است [۲].

از طرف دیگر، ساختارهای متناوب می‌توانند ویژگی‌هایی از خود نشان دهند که به‌طور معمول در مواد طبیعی یافت نمی‌شود. این ساختارها را می‌توان به گونه‌ای طراحی نمود که در محدوده فرکانسی مشخصی که گاف نواری نامیده می‌شود، به هیچ موجی اجازه انتشار ندهند. همین ویژگی می‌تواند کاربردهای فراوانی داشته باشد و به‌طور مثال این ساختارها را می‌توان در محدوده فرکانسی گاف نواری به عنوان بازتابنده مورد استفاده قرار داد [۳].

به منظور استفاده از ساختارهای متناوب در کاربردهای مختلف جهت کنترل‌کردن انتشار موج به روش‌های عددی یا تحلیلی مناسبی برای محاسبه منحنی پاشندگی نیاز داریم. تاکنون، برای این کار روش‌های عددی تمام موجی مانند تفاضل محدود حوزه زمان [۴] و اجزای محدود [۵] استفاده شده‌اند. علاوه‌بر این، روش‌هایی از قبیل بسط به امواج صفحه‌ای برای ساختارهای متناوب یک‌بعدی یا دوبعدی به‌کار می‌روند [۶]. هم‌چنین، روش قطب بازتاب برای محاسبه منحنی پاشندگی ساختارهای متناوب استفاده شده است [۸-۷]. برای ساختارهای متناوب یک‌بعدی، روش‌های تحلیلی مانند روش ماتریس انتقال را نیز می‌توان به‌کار برد [۹].

استفاده از گرافین در ساختارهای متناوب، با توجه به کنترل‌پذیربودن آن، می‌تواند مفید واقع شود [۱۰]. بنابراین، به روش‌هایی برای محاسبه منحنی پاشندگی گرافین نیاز است. محاسبه منحنی پاشندگی گرافین به‌دلیل ضخامت ناچیزی که دارد، با استفاده از روش‌های عددی ذکرشده ممکن است دچار مشکل شود. از این‌رو، ارائه روشی تحلیلی که با سرعت بالا و دقت مناسب، منحنی پاشندگی را محاسبه نماید، از اهمیت بالایی برخوردار است. از طرف دیگر، برمبنای اطلاعات ما، تاکنون بر روی محاسبه منحنی پاشندگی ساختارهای متناوب گرافینی کار

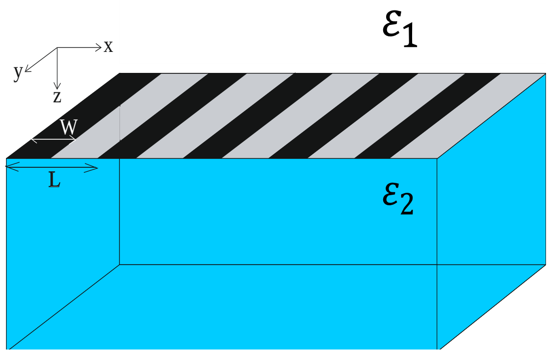
* نویسنده پاسخگو: khavasi@sharif.edu

چندانی انجام نشده است. تنها در [۱۱]، مودهای جای‌گزیده مربوط به ساختاری متناوب که از گرافینی با پتانسیل شیمیایی متناوب تشکیل شده است، با روشی عددی به کمک ضریب انتقال در برخورد عمود موج تخت به ساختار، به‌دست آمده‌اند. این در حالی است که مودهای انتشاری در این ساختار مورد بررسی قرار نگرفته‌اند. ما در این مقاله قصد داریم منحنی پاشندگی چنین ساختاری را به‌طور کامل از دو روش عددی و تحلیلی محاسبه نماییم. در روش عددی پیاده‌سازی‌شده، از آن‌جا که مودهای ساختار، قطب‌های ضرایب انتقال و بازتاب هستند [۱۲]، با استفاده از تابش موج تخت با پلاریزاسیون TM تحت زاویه مناسب، ضرایب انتقال و بازتاب به روش بسط به امواج صفحه‌ای محاسبه می‌شوند و از روی قطب ضریب انتقال، منحنی پاشندگی استخراج می‌شود. هم‌چنین یک روش تحلیلی مبتنی بر روش ماتریس انتقال ارائه خواهیم داد. در این روش تحلیلی، جریان سطحی در هر نوار گرافینی را به‌صورت مجموع دو موج منتشرشونده در جهت مثبت و منفی درنظر گرفته و با استفاده از ضرایب بازتاب و انتقال در برخورد موج پلاسمونی به یک ناپیوستگی در رسانندگی سطحی گرافین [۱۳]، ماتریس انتقال مربوط به یک سلول واحد از ساختار را محاسبه و با اعمال شرط فلوکه [۱۴]، مودهای ساختار را به‌دست می‌آوریم. حسن این روش تحلیلی، سرعت بالا و سادگی پیاده‌سازی است. لازم به ذکر است که این روش، برای ساختارهای متناوب که کوچک‌ترین قسمت ساختار در آن‌ها از نصف طول موج بزرگ‌تر است، دقت بسیار بالایی دارد و دقت آن، با کاهش ابعاد ساختار کم می‌شود.

ساختار این مقاله به این شرح است: در ابتدا، ساختار مورد بررسی، توضیح داده می‌شود. در زیربخش بعدی، روش عددی مربوط به محاسبه منحنی پاشندگی با استفاده از ضرایب انتقال و بازتاب در برخورد موج تخت با پلاریزاسیون TM به ساختار بیان می‌گردد. سپس به شرح روش تحلیلی پیشنهادی، نحوه محاسبه ماتریس انتقال مربوط به یک سلول واحد و استخراج مودهای ساختار پرداخته می‌شود. در ادامه نتایج حاصل از هر دو روش برای دو ساختار با گرافین بی‌اتلاف و تلفاتی مقایسه می‌شوند. در پایان نیز مطالب ارائه‌شده در مقاله جمع‌بندی و نتیجه‌گیری می‌شوند.

۲- محاسبه منحنی پاشندگی

ساختار مورد بررسی در این مقاله که در شکل (۱) نشان داده شده است، آرایه‌ای از نوارهای گرافینی با دوره تناوب L است که در مرز بین دو ناحیه دی‌الکتریک نیمه‌بی‌نهایت با ضریب گذردهی ε_1 و ε_2 قرار گرفته است.



شکل (۱): ساختار مورد بررسی در حالت سه‌بعدی. نوارهای گرافینی با رنگ مشکی دارای پتانسیل شیمیایی بالاتری هستند.

هر سلول واحد از ساختار نیز شامل دو نوار گرافینی با پتانسیل شیمیایی مختلف است. عرض نوار با پتانسیل شیمیایی بالاتر، w فرض شده است. نوارهای گرافینی با رسانندگی سطحی مدل می‌شوند. در حالت کلی، رسانندگی سطحی گرافین دارای دو بخش درون‌نواری و میان‌نواری است که با استفاده از فرمول کوبو[1] به‌دست می‌آیند [۱۳]:

$$\sigma_s = \sigma_{s,intra} + \sigma_{s,inter} = \frac{e^2 E_F}{\pi\hbar^2}\frac{-j}{\omega - j\tau^{-1}} + \frac{-je^2}{4\pi\hbar}\ln\left(\frac{2E_F - \hbar(\omega - j\tau^{-1})}{2E_F + \hbar(\omega - j\tau^{-1})}\right) \qquad (۱)$$

که در آن، e بار الکترون، k_B ثابت بولتزمن، T دما برحسب کلوین، $\hbar$ ثابت پلانک کاهش‌یافته، E_F انرژی فرمی و τ زمان آسایش هستند. زمان آسایش با رابطه $\tau = \mu E_F / e V_F^2$ به تحرک‌پذیری بارها مربوط می‌شود. V_F سرعت فرمی و تقریباً برابر 10^6 m/s است. وابستگی زمانی به‌صورت $e^{j\omega t}$ و $k_B T \ll E_F, \hbar\omega$ فرض شده است. اگر فرض $\hbar\omega \ll 2E_F$ را نیز در نظر بگیریم، می‌توان از بخش میان‌نواری صرف‌نظر کرد. در این مقاله، با توجه به این فرض، گرافین را توسط رسانندگی سطحی درون‌نواری مدل‌سازی می‌نماییم.

هدف ما به‌دست‌آوردن مودهای این ساختار است که با منحنی پاشندگی یعنی نمودار فرکانس برحسب ثابت انتشار نشان داده می‌شود. در این مقاله، به‌منظور دست‌یابی به این هدف از دو روش بهره گرفته شده است. یکی از روش‌ها، روشی عددی است که با استفاده از فاز ضریب انتقال ساختار، مودها را شناسایی می‌نماید [۸] و روش دیگر، روشی تحلیلی است که از ماتریس انتقال یک سلول واحد از ساختار استفاده می‌کند. در ادامه این دو روش به‌طور مجزا توضیح داده می‌شوند.

1- Kubo Formula

۲-۱- روش مبتنی‌بر قطب‌های ضرایب انتقال و بازتاب

موج تختی با پلاریزاسیون TM از ناحیه اول و تحت زاویه θ به ساختار نشان داده شده در شکل (۲) تابیده می‌شود. تابش موج تخت باعث به‌وجودآمدن مرتبه‌های پراش بازتابی و انتقالی می‌شود. لازم به ذکر است که در این مقاله، دوره تناوب ساختار را زیرطول موج فرض می‌کنیم.

با توجه به تناوب ساختار گرافینی، می‌توان میدان الکترومغناطیسی کل را در دو ناحیه همگن به کمک بسط رایلی بیان نمود [۱۵]:

$$H_{1y} = e^{-jk_{1z0}z} + \sum_n r_n e^{jk_{1zn}z} e^{-jk_{xn}x} \quad (۲)$$

$$E_{1x} = \frac{k_{1z0}}{\omega\varepsilon_1} e^{-jk_{1zn}z} - \sum_n r_n \frac{k_{1zn}}{\omega\varepsilon_1} e^{jk_{1zn}z} e^{-jk_{xn}x} \quad (۳)$$

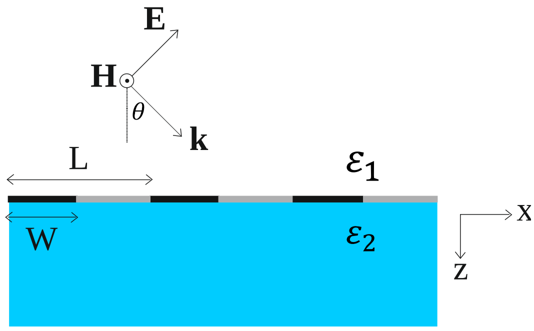
$$H_{2y} = \sum_n t_n e^{-jk_{2zn}z} e^{-jk_{xn}x} \quad (۴)$$

$$E_{2x} = \sum_n t_n \frac{k_{2zn}}{\omega\varepsilon_2} e^{-jk_{2zn}z} e^{-jk_{xn}x} \quad (۵)$$

در این عبارت‌ها، r_n و t_n به‌ترتیب ضرایب بازتاب و انتقال مراتب مختلف پراش در ناحیه اول و دوم هستند و

$$k_{xn} = k_0 n_1 \sin\theta + \frac{2n\pi}{L} \quad (۶)$$

$$k_{izn} = \sqrt{k_0^2 n_i^2 - k_{xn}^2} \quad (۷)$$



شکل (۲): ساختار دوبعدی مساله که تحت تابش مایل موج با پلاریزاسیون TM قرار گرفته است.

که در آن، i=۱/۲ و n_i ضریب شکست ناحیه iام است. k_0 عدد موج فضای آزاد است و لازم است k_{izn} درصورت حقیقی‌بودن، منفی و درصورت موهومی‌بودن، مثبت باشد. با استفاده از شرایط مرزی مساله، r_n و t_n محاسبه می‌شوند. برای این‌که بتوان از شرایط مرزی استفاده کرد، باید سری فوریه رسانندگی سطحی روی مرز را نوشت. به منظور هم‌گرایی سریع‌تر مساله، معکوس رسانایی سطحی را بسط فوریه می‌دهیم [۱۵]:

$$\frac{1}{\sigma_s} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_{s1}} & 0 < x < w \\ \frac{1}{\sigma_{s2}} & w < x < L \end{cases} = \sum_n \frac{1}{\sigma_n} e^{-j\frac{2n\pi}{L}x} \quad (۸)$$

شرایط مرزی مساله عبارت‌اند از:

$$(E_{1x} - E_{2x})|_{z=0} = 0 \quad (۹)$$

$$\frac{1}{\sigma_s}(H_{1y} - H_{2y})\big|_{z=0} = E_{1x}|_{z=0} \quad (۱۰)$$

با جای‌گذاری روابط بیان شده در (۲) در این شرایط مرزی، دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} t_n \\ r_n \end{bmatrix} = S\begin{bmatrix} a \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_2 & \eta_1 \\ -I - \eta_2[[1/\sigma_s]]^{-1} & I \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ -I & I - \eta_2[[1/\sigma_s]]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ o \end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

که در آن، I ماتریس واحد است، η_i ماتریسی قطری است که درایه (n,n) آن برابر $k_{izn}/\omega\varepsilon_i$ است و $[[1/\sigma_s]]^{-1}$ ماتریسی توییپلیتس [1] است که درایه (n,m) آن برابر $1/\sigma_{n-m}$ است. هم‌چنین، a برداری ستونی است که تنها درایه مرکزی آن برابر یک است و بقیه درایه‌ها برابر صفر هستند و o بردار ستونی صفر است. t_n و r_n بردارهای ستونی هستند که به‌ترتیب شامل ضرایب انتقال و بازتاب مراتب مختلف پراش هستند. دستگاه معادلات فوق درحالتی‌که n از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر پیدا کند، کاملاً دقیق است. با این حال، در محاسبات رایانه‌ای ناچاریم n را از $-N$ تا $+N$ تغییر دهیم که N مرتبه قطع‌کردن سری فوریه را نشان می‌دهد. به‌دلیل این‌که ساختار مورد بررسی ما زیر طول‌موج است، تنها ضرایب بازتاب و انتقال مربوط به پراش مرتبه اول یعنی r_0 و t_0 مقدار قابل توجهی دارند و بنابراین از بقیه ضرایب بازتاب و انتقال صرف‌نظر می‌شود.

مودهای ساختار قطب ضرایب بازتاب و انتقال هستند. از تئوری دیاگرام بود [2]، می‌دانیم که فاز ضرایب بازتاب و انتقال را در نزدیکی قطب $P_k = \beta_k - j\alpha_k$ می‌توان به صورت زیر نوشت [۸]:

$$\theta(\beta) = \theta_0 + \tan^{-1}\left(\frac{\beta - \beta_k}{\alpha_k}\right) \quad (۱۲)$$

که در آن، θ_0 فاز ثابتی است که اثر سایر صفرها و قطب‌ها را نشان می‌دهد. در نوشتن این رابطه فرض کرده‌ایم که سایر صفرها و قطب‌ها به اندازه کافی از قطب P_k دور هستند. تحت این شرایط، در محل یک قطب حقیقی خالص که یک مود انتشاری بی‌تلف را نشان می‌دهد، فاز به اندازه π رادیان تغییر می‌کند [۹]؛ حال آن‌که برای قطب‌های مختلط که نشان‌دهنده مودهای انتشاری بااتلاف هستند، α_k صفر نیست و بنابراین تغییرات فاز در محل قطب مانند تابع پله تیز نیست. برای این مودها، به جای مشاهده فاز بهتر است مشتق فاز را بررسی کنیم. مشتق فاز به شکل تابع لورنتز قابل بیان است [۸]:

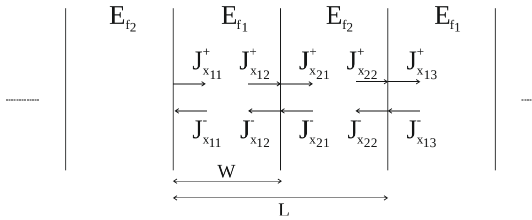
1- Toeplitz
2- Bode Diagram

$$\frac{d\theta}{d\beta}=\frac{1/\alpha_k}{1+[(\beta-\beta_k)/\alpha_k]^2} \tag{۱۳}$$

طبق این رابطه با دانستن مکان پیک منحنی و نصف پهنای نصف اندازه[1] آن می‌توان P_k را به‌دست آورد.

ضریب بازتاب علاوه‌بر قطب، صفرهایی هم دارد. درصورتی‌که این صفرها در نزدیکی قطب‌ها قرار داشته باشند، اثر قطب را بر فاز کم می‌کنند و تشخیص قطب دشوار می‌شود. برای حل این مشکل، از آن‌جا که قطب‌های ضرایب بازتاب و انتقال یکسان هستند ولی ضریب انتقال صفری ندارد، برای تشخیص مودها از ضریب انتقال استفاده می‌کنیم [۸].

برای ساختارهای متناوب، ثابت فاز در محدوده اول بریلوئن[2] قرار می‌گیرد که برای ساختارهای یک‌بعدی، به صورت $-\frac{\pi}{L}<\beta<\frac{\pi}{L}$ بیان می‌شود [۱۶]. بنابراین برای به‌دست‌آوردن منحنی پاشندگی کافی است در هر فرکانس، ثابت فاز را در این محدوده تغییر دهیم. این ثابت فاز برابر مؤلفه‌ای از بردار موج مربوط به موج تابشی است که موازی ساختار است (k_x) و همین امر زاویه تابش موج فرودی را از معادله (۶) مشخص می‌سازد. باید توجه داشت که ممکن است به‌دلیل بزرگ‌ترشدن β نسبت به k_0n_1، زاویه تابش موج، موهومی شود. این حالت با فیزیک تناسبی ندارد و نشان می‌دهد که تحریک این مودهای ساختار توسط تابش موج تخت ممکن نیست ولی در عین حال، از لحاظ ریاضی مشکلی برای ما به وجود نخواهد آورد [۱۷].



شکل (۳): ساختار لایه‌ای متناوب از نوارهای گرافینی با پتانسیل شیمیایی متفاوت

۲-۲- روش پیشنهادی براساس ماتریس انتقال

در این قسمت مودهای ساختار را به روش کاملاً تحلیلی و با استفاده از ماتریس انتقال به‌دست می‌آوریم [۱۶]. برای این منظور مطابق شکل (۳)، ساختار متناوب متشکل از نوارهای گرافینی را به‌صورت یک ساختار متناوب لایه‌ای درنظر می‌گیریم که امواج پلاسمونیکی در راستای عمود بر مرزهای ساختار در حال انتشار هستند. در هرلایه از ساختار می‌توان جریان سطحی را به صورت حاصل‌جمع یک موج منتشرشونده در جهت $+x$ با دامنه J_x^+ و یک موج منتشرشونده در جهت $-x$ و با دامنه J_x^- نوشت:

$$J_x=J_x^+e^{-j\beta x}+J_x^-e^{+j\beta x} \tag{۱۴}$$

که در آن، β ثابت انتشار موج پلاسمونیکی منتشرشونده در لایه گرافینی بی‌نهایت با مشخصاتی همانند مشخصات نوار گرافینی هر لایه است [۱۸]:

$$\beta_i=\frac{-2j\omega\varepsilon^{eff}}{\sigma_{s_i}} \tag{۱۵}$$

در رابطه فوق، $\varepsilon^{eff}=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2$، ω فرکانس زاویه‌ای و σ_s رسانندگی سطحی گرافین هستند و i=۱/۲ نوار گرافینی اول و دوم را مشخص می‌نماید. برای برقراری ارتباط میان J_x^+ و J_x^- در لایه‌های مختلف از ماتریس انتقال استفاده می‌کنیم. به منظور محاسبه ماتریس انتقال از روابط مربوط به ضرایب انتقال و بازتاب در برخورد موج پلاسمونیکی به یک ناپیوستگی در رسانندگی سطحی گرافین که در [۱۳] به‌دست آمده‌اند، بهره می‌گیریم:

$$r_{12}=e^{-j\theta_{12}}\frac{\beta_1-\beta_2}{\beta_1+\beta_2} \tag{۱۶}$$

$$t_{12}=\frac{2\sqrt{\beta_1\beta_2}}{\beta_1+\beta_2} \tag{۱۷}$$

که در آن، r_{12} و t_{12} به‌ترتیب ضریب بازتاب و انتقال در برخورد موج پلاسمونیکی از ناحیه اول به ناحیه دوم هستند و

$$\theta_{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\tan^{-1}(\beta_1u/\beta_2)}{u^2+1}du \tag{۱۸}$$

برای محاسبه ضرایب بازتاب و انتقال در برخورد موج پلاسمونیکی از ناحیه دوم به ناحیه اول یعنی r_{21} و t_{21} کافی است جای β_1 و β_2 را در (۱۶) جابه‌جا کنیم. اکنون می‌توان ماتریس انتقال مربوط به یک سلول واحد از ساختار را به دست آورد. دامنه امواج منتشرشونده در جهت $+x$ و $-x$ در ابتدا و انتهای هر یک از نوارهای گرافینی به‌دلیل انتشار موج تنها با یک‌دیگر اختلاف فاز دارند و ماتریس انتقال هر یک از مرزهای ساختار نیز با استفاده از ضرایب بازتاب و انتقال بیان‌شده در (۱۶) حاصل می‌شوند. بنابراین، ماتریس انتقال یک سلول واحد از حاصل‌ضرب چهار ماتریس به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}T=&\left(\frac{1}{t_{12}}\begin{bmatrix}t_{12}t_{21}-r_{12}r_{21} & r_{12}\\ -r_{21} & 1\end{bmatrix}\right)\\ &\times\begin{bmatrix}e^{-j\beta_2(L-w)} & 0\\ 0 & e^{j\beta_2(L-w)}\end{bmatrix}\\ &\times\left(\frac{1}{t_{21}}\begin{bmatrix}t_{12}t_{21}-r_{12}r_{21} & r_{21}\\ -r_{12} & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}e^{-j\beta_1 w} & 0\\ 0 & e^{j\beta_1 w}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{۱۹}$$

با استفاده از این ماتریس و با توجه به شکل (۳) می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix}J_{x13}^+\\ J_{x13}^-\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}J_{x11}^+\\ J_{x11}^-\end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

1- Half Width Half Magnitude (HWHM)
2- Brillouin

از طرفی به‌دلیل متناوب‌بودن ساختار، با استفاده از قضیه فلوکه داریم:

$$\begin{bmatrix} J^{+}_{x13} \\ J^{-}_{x13} \end{bmatrix} = e^{-j\beta L} \begin{bmatrix} J^{+}_{x11} \\ J^{-}_{x11} \end{bmatrix} \quad (۲۱)$$

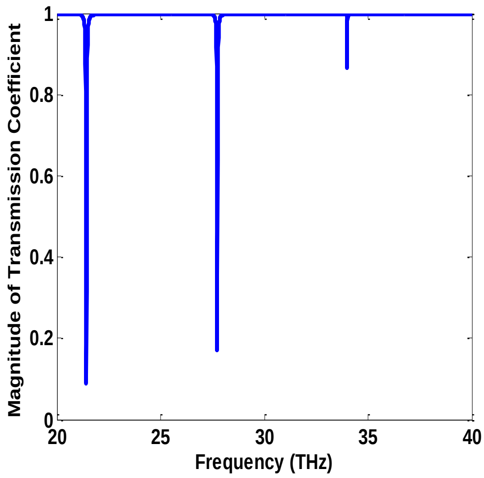
که در آن، β ثابت انتشار مربوط به مود ساختار است. با استفاده از (۲۰) نتیجه گرفته می‌شود که $e^{-j\beta L}$ مقادیر ویژه ماتریس انتقال T و بردار $[J^{+}_{x11} \quad J^{-}_{x11}]^T$ بردار ویژه آن است [۱۶]. با توجه به مطالب گفته‌شده به‌منظور محاسبه منحنی پاشندگی ساختار، کافی است در هر فرکانس ماتریس انتقال مربوط به یک سلول واحد را به‌دست آورده و مقادیر ویژه آن‌را محاسبه می‌نماییم. چنان‌چه مقادیر ویژه ماتریس انتقال را λ فرض کنیم، ثابت انتشار β از طریق رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\beta = \frac{\ln(\lambda)}{-jL} \quad (۲۲)$$

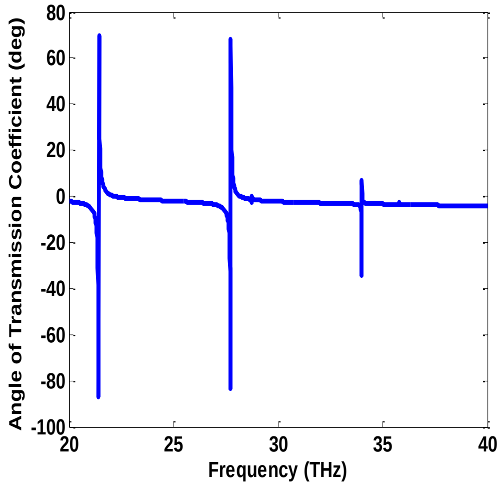
که قسمت حقیقی آن همان ثابت فاز مورد نظر ماست.

۳- نتایج عددی و تحلیلی و بررسی آن‌ها

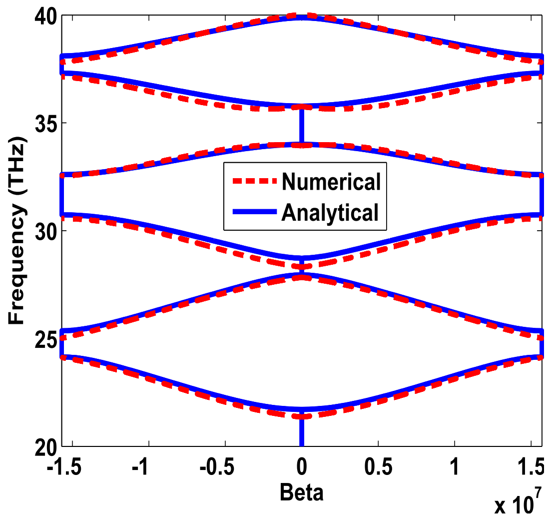
حال که هر دو روش عددی و تحلیلی به‌منظور محاسبه منحنی پاشندگی توضیح داده شدند، با استفاده از مثال‌هایی به بررسی صحت و دقت روش تحلیلی پیشنهاد شده در این مقاله می‌پردازیم. به همین دلیل، ضریب دی‌الکتریک دو لایه نیمه بی‌نهایت بالا و پایین به صورت $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1.96\varepsilon_0$ و پتانسیل شیمیایی نوارهای گرافینی برابر $E_{f_1} = 0.3\ \mathrm{eV}$ و $E_{f_2} = 0.1\ \mathrm{eV}$ فرض می‌شوند. دوره تناوب ساختار برابر $L = 200\ \mathrm{nm}$ است و عرض نوار گرافینی با پتانسیل شیمیایی بالاتر $w = 100\ \mathrm{nm}$ درنظر گرفته می‌شود. در ابتدا گرافین بدون تلف $(\mu = \infty)$ است و قصد داریم منحنی پاشندگی را در بازه فرکانسی 20 THz تا 40 THz به دست آوریم. به ازای هر k_x در محدوده $-\frac{\pi}{L} < k_x < \frac{\pi}{L}$، ساختار تحت تابش موج تختی با پلاریزاسیون TM تحت زاویه مناسب قرار گرفته و فاز ضریب انتقال به کمک روش عددی بیان‌شده محاسبه می‌گردد. همان‌طورکه در بخش ۲-۱ توضیح داده شد، زاویه مناسب با توجه به مقدار k_x و از معادله (۶) محاسبه می‌شود. به‌عنوان مثال، اندازه و فاز ضریب انتقال برای $k_x = 0.025\frac{\pi}{L}$ با فرض $N = 20$ به‌ترتیب در شکل (۴) و شکل (۵) نشان داده شده‌اند. همان‌طورکه در این دو شکل مشخص است، در فرکانس‌های $f_1 = 21.42\ \mathrm{THz}$، $f_2 = 27.73\ \mathrm{THz}$ و $f_3 = 33.99\ \mathrm{THz}$ مود داریم؛ چون در این فرکانس‌ها، اندازه ضریب انتقال دارای کمینه است و فاز آن نیز تغییرات شدیدی کرده است. این‌کار را باید به ازای تمام مقادیر k_x در بازه $-\frac{\pi}{L} < k_x < \frac{\pi}{L}$ انجام داده و به ازای هر k_x، فرکانس مودهای ساختار را به دست آورده تا بتوان منحنی پاشندگی ساختار یعنی نمودار k_x (که همان β است) بر حسب فرکانس را رسم کنیم. نتایج در شکل (۶) آمده است.



شکل (۴): اندازه ضریب انتقال ساختار در حالت بدون تلف برای $k_x = 0.025\frac{\pi}{L}$



شکل (۵): فاز ضریب انتقال ساختار در حالت بدون تلف برای $k_x = 0.025\frac{\pi}{L}$



شکل (۶): منحنی پاشندگی در حالت بی‌اتلاف

برای استفاده از روش تحلیلی نیز کافی است مقادیر ویژه ماتریس انتقال مربوط به هر سلول واحد از ساختار را در هر فرکانس بیابیم. به این ترتیب، منحنی پاشندگی ساختار به هر دو روش محاسبه‌شده و در شکل (۶) آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج تحلیلی با عددی تطابق بسیار خوبی دارد. هم‌چنین، ساختار دارای گاف نواری در محدوده‌های فرکانسی زیر است:

$$24.15\ \text{THz} < f < 25.36\ \text{THz} \quad (۲۳)$$

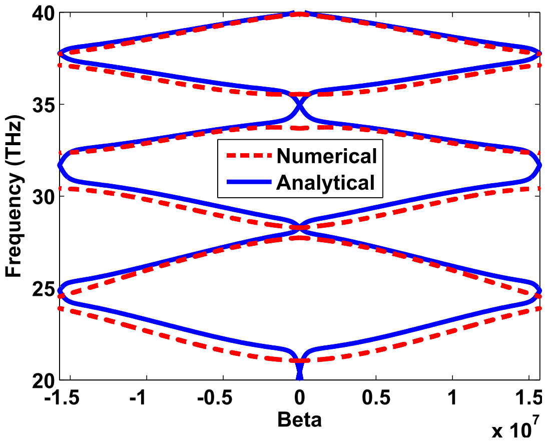
$$30.74\ \text{THz} < f < 32.6\ \text{THz} \quad (۲۴)$$

$$37.31\ \text{THz} < f < 38.1\ \text{THz} \quad (۲۵)$$

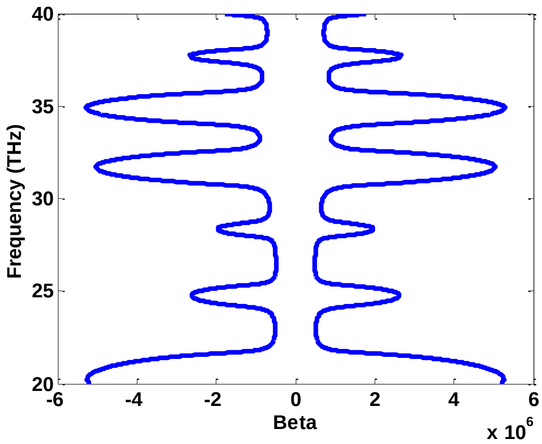
در محدوده گاف نواری هیچ مودی اجازه انتشار در این ساختار را نخواهد داشت. چنین حالتی می‌تواند کاربردهای فراوانی داشته باشد. بنابراین با توجه به آن‌که روش تحلیلی ارائه‌شده از دقت بالایی در تعیین این گاف‌های نواری برخوردار بوده است، به‌دلیل سادگی و سرعت فوق‌العاده بالای آن می‌تواند بسیار مورد توجه قرار گیرد. هم‌چنین همان‌طورکه انتظار داشتیم، به‌دلیل هم‌پاسخ‌بودن ساختار، منحنی پاشندگی متقارن است و ساختار برای موج رفت و برگشت تفاوتی ندارد. حالت $\beta = 0$ مربوط به مودهای جای‌گزیده است که در [۱۱] بررسی شده‌اند.

روش تحلیلی در تعیین منحنی پاشندگی در حالت اتلافی‌بودن گرافین هم محدودیتی نخواهد داشت و به خوبی کار می‌کند. به عنوان مثالی دیگر، $\mu = 6\ \text{m}^2/\text{Vs}$ فرض می‌شود و بار دیگر منحنی پاشندگی به هر دو روش تحلیلی و عددی محاسبه می‌گردد. نتایج به‌دست‌آمده در شکل (۷) رسم شده‌اند. در این حالت نیز تطبیق نتایج خوب است و با افزایش فرکانس، تطابق بهتر می‌شود؛ دلیل این امر آن است که برای به‌دست‌آوردن ماتریس انتقال در روش تحلیلی از ضرایب بازتاب و انتقال در برخورد موج پلاسمونی به یک ناپیوستگی در گرافین استفاده کرده و در واقع از مودهای میراشونده‌ای که در اطراف مرز ناپیوستگی وجود دارند، صرف‌نظر نموده‌ایم. همین امر باعث می‌شود که مدل استفاده‌شده برای نوارهای گرافینی پهن‌تر نسبت به طول موج، دارای دقت بالاتری باشد. با افزایش فرکانس، طول موج کوتاه‌تر می‌شود و پهنای نوارهای گرافینی نسبت به طول موج افزایش می‌یابد.

به کمک روش تحلیلی ثابت انتشار به‌طور کامل محاسبه می‌شود که بخش حقیقی آن ثابت فاز و بخش موهومی آن ثابت تضعیف را مشخص می‌سازد. بنابراین در حالت تلفاتی‌بودن گرافین، ثابت تضعیف را نیز به سادگی خواهیم داشت که در شکل (۸) آمده است.

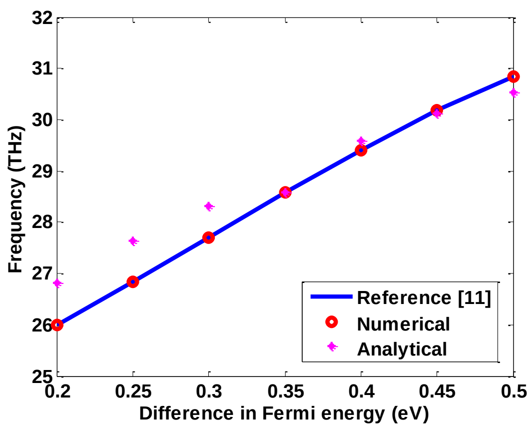


شکل (۷): منحنی پاشندگی در حالت بااتلاف $\mu = 6\ \text{m}^2/\text{Vs}$



شکل (۸): ثابت تضعیف ساختار برحسب فرکانس در حالت بااتلاف $\mu = 6\ \text{m}^2/\text{Vs}$

همان‌طورکه در شکل (۷) دیده می شود، در حالت تلفاتی بودن ساختار، گاف نواری همانند حالت بدون اتلاف وجود ندارد. اما اگر شکل (۷) و شکل (۸) را در کنار یکدیگر بررسی کنیم، خواهیم دید که در ثابت فازهای بسیار کوچک، ثابت تضعیف بزرگ است و این به این معناست که موج شدیداً میراشونده است و عملاً در این نواحی موج انتشاری در ساختار وجود ندارد.



شکل (۹): مقایسه روش‌های پیشنهادی با نتایج [۱۱]

بنابراین لازم است در هنگام استفاده از ساختار، این نکته مورد توجه قرار گیرد.

در پایان، نتایج حاصل از روش‌های پیشنهادی را با نتایج [۱۱] مقایسه می‌کنیم. در این مقاله مودهای جای‌گزیده که معادل با $\beta = 0$ هستند، با فرض $\mu = 1\ m^2/Vs$ مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در [۱۱] اندازه ضریب انتقال ساختار بر حسب اختلاف پتانسیل شیمیایی دو نوار گرافینی و فرکانس رسم شده است. به این ترتیب، محل کمینه ضریب انتقال، مودهای ساختار را مشخص می‌نماید و ما از این نتایج برای اعتبارسنجی نتایج خود استفاده کرده‌ایم. شکل (۹) که در آن فرکانس مود بر حسب اختلاف پتانسیل شیمیایی دو نوار گرافینی رسم شده است، حاصل این مقایسه را نشان می‌دهد. همان‌طورکه در این شکل مشخص است، روش‌های پیشنهادی از دقت مناسبی برخوردار هستند. همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد، روش تحلیلی به‌دلیل آن‌که در محاسبه ضرایب انتقال و بازتاب برخورد مود پلاسمونی به ناپیوستگی در رسانندگی سطحی، مودهای میراشونده در اطراف مرز در نظر گرفته نشده‌اند، از دقت کم‌تری برخوردار است.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله منحنی پاشندگی ساختاری متناوب از نوارهای گرافینی با پتانسیل‌های شیمیایی متفاوت به دو روش تحلیلی و عددی محاسبه شد. در روش عددی، با توجه به آن‌که مودهای ساختار، قطب‌های ضرایب بازتاب و انتقال هستند، با تابش موج صفحه‌ای با پلاریزاسیون TM به ساختار و بررسی فاز ضریب انتقال منحنی پاشندگی را به‌دست آوردیم. در روش تحلیلی، ماتریس انتقال یک سلول واحد از ساختار با استفاده از ضرایب بازتاب و انتقال در برخورد موج پلاسمونی به یک ناپیوستگی در رسانندگی گرافین محاسبه شد. سپس با بهره‌گیری از قضیه فلوکه، نشان داده شد که می‌توان مودهای ساختار را از طریق محاسبه مقادیر ویژه این ماتریس به‌دست آورد. با مقایسه نتایج حاصل از این دو روش، در دو حالت گرافین بی‌اتلاف و تلفاتی، صحت و دقت روش تحلیلی پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفت. این مقایسه نشان داد که روش تحلیلی در عین سادگی و سرعت بسیار بالای آن، از دقت خوبی نیز برقرار است و بنابراین می‌تواند در کاربردهای فراوانی مورد استفاده قرار گیرد.

۵- مراجع

[1] A. K. Geim and K. S. Novoselov, "The rise of graphene," Nature materials, vol. 6, pp. 183-191, 2007.

[2] F. H. Koppens, D. E. Chang, and F. J. García de Abajo, "Graphene plasmonics: a platform for strong light–matter interactions," Nano letters, vol ,۱۱ .pp. 3370-3377, 2011.

[3] R.-B. R. Hwang, Periodic Structures: Mode-matching Approach and Applications in Electromagnetic Engineering, John Wiley & Sons, 2012.

[4] H. Mosallaei and Y. Rahmat-Samii, "Periodic bandgap and effective dielectric materials in electromagnetics: characterization and applications in nanocavities and waveguides," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 51, pp. 549-563, 2003.

[5] B. Hiett, J. Generowicz, S. Cox, M. Molinari, D. Beckett, and K. Thomas, "Application of finite element methods to photonic crystal modelling," IEE Proceedings-Science, Measurement and Technology, vol ,۱۴۹ .pp. 293-296, 2002.

[6] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, and R. D. Meade, Photonic crystals, molding the flow of light: Princeton university press, 2011.

[7] S. Nekuee, M. Akbari, and K. Mehrany, "A Novel Method for Band Structure Analysis of Photonic Crystal Slabs," IEEE Photonics Journal, vol. 3, pp. 1111-1122, 2011.

[8] S. A. H. Nekuee, M. Akbari, and A. Khavasi, "Guided mode extraction in monolayer colloidal crystals based on the phase variation of reflection and transmission coefficients," Optics Communications, vol. 364, pp. 44-49, 2016.

[9] S. Khorasani and K. Mehrany, "Differential transfer-matrix method for solution of one-dimensional linear nonhomogeneous optical structures," JOSA B, vol. 20, pp. 91-96, 2003.

[10] A. Fallahi and J. Perruisseau-Carrier, "Design of tunable biperiodic graphene metasurfaces," Physical Review B, vol. 86, p. 195408, 2012.

[11] C. Beckerleg and E. Hendry, "Localized plasmons induced by spatial conductivity modulation in graphene," JOSA B, vol. 33, pp. 2051-2056, 2016.

[12] A. H. Hosseinnia, A. Khavasi, P. Sarrafi, and K. Mehrany, "Determination of complex modes in photonic crystal waveguides using the phase variation in characteristic coefficients," Optics letters, vol. 37, pp. 3078-3080, 2012.

[13] B. Rejaei and A. Khavasi, "Scattering of surface plasmons on graphene by a discontinuity in surface conductivity," Journal of Optics, vol. 17, p. 075002, 2015.

[14] A. V. Lavrinenko, J. Lægsgaard, N. Gregersen, F. W. Schmidt, and T. Søndergaard, Numerical Methods in Photonics, CRC Press, 2015.

[15] A. Khavasi, "Fast convergent Fourier modal method for the analysis of periodic arrays of graphene ribbons," Optics letters, vol. 38, pp. 3009-3012, 2013.

[16] B. E. Saleh, M. C. Teich, and B. E. Saleh, Fundamentals of photonics, vol. 22, Wiley New York, 1991.

[17] A. Fallahi, K. Z. Aghaie, A. Enayati, and M. Shahabadi, "Diffraction analysis of periodic structures using a transmission-line formulation: principles and applications," Journal of Computational and Theoretical Nanoscience, vol. 4, pp. 649-666, 2007.

[18] Y. V. Bludov, A. Ferreira, N. Peres, and M. Vasilevskiy, "A primer on surface plasmon-polaritons in graphene," International Journal of Modern Physics B, vol. 27, p. 1341001, 2013.