

## طراحی المان محدود و تحلیل ناحیه‌ای چگالی شار مغناطیسی بی‌باری و نیروی ضد محرکه الکتریکی در ماشین الکتریکی بدون هسته شار شعاعی مغناطیس دائم استاتور میانی

بهروز شیرالی<sup>۱</sup>، محمدرضا علیزاده پهلوانی<sup>۲\*</sup>

۱- کارشناسی ارشد، ۲- دانشیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

(دریافت: ۹۵/۱۱/۰۸، پذیرش: ۹۶/۰۷/۲۶)

**چکیده:** در این مقاله چگالی شار مغناطیسی بی‌باری و نیروی ضد محرکه الکتریکی ماشین الکتریکی بدون هسته شار شعاعی مغناطیس دائم استاتور میانی با استفاده از تحلیل ناحیه‌ای ارائه شده است. ابتدا روابط تحلیلی چگالی شار مغناطیسی بی‌باری و نیروی ضد محرکه الکتریکی این ماشین به کمک معادلات ماکسول ارائه و سپس این روابط با نتایجی که از طراحی المان محدود در نرم‌افزار ماکسول استخراج شده‌اند، اعتبارسنجی می‌گردد. این مقایسه نشان می‌دهد که اختلاف نتایج روابط تحلیلی با نتایج المان محدود حدود ۳ درصد است. در این مقاله برای محاسبه نیروی ضد محرکه الکتریکی ناشی از آهنرباهای دائم از تمام مؤلفه‌های توزیع چگالی هادی سیم‌پیچی استفاده شده است. لازم به ذکر است که در تحقیقات مرتبط با این موضوع فقط از اولین مؤلفه شعاعی چگالی شار مغناطیسی استفاده می‌شود. نشان داده می‌شود که ضریب عرض آهنربا در غیرسینوسی نمودن چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در شعاع نامی استاتور و کاهش تعداد زوج قطب‌ها در اشباع مغناطیسی یوغ‌ها و کاهش ولتاژ القایی نقش اساسی دارد. همچنین نشان داده می‌شود که افزایش طول فاصله هوایی می‌تواند در صفر نمودن اعوجاج هارمونیک نیروی ضد محرکه الکتریکی بیشترین ایفاء نقش را داشته باشد.

### کلیدواژه‌ها: المان محدود، چگالی شار شعاعی و ماشین مغناطیس دائم هسته هوایی

#### ۱- مقدمه

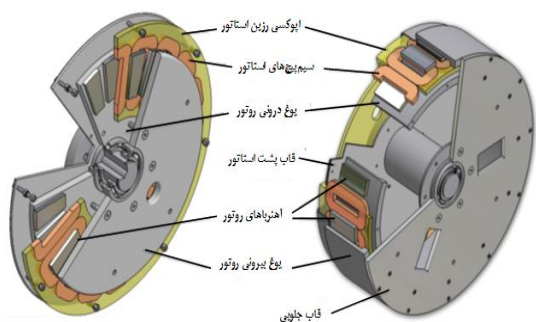
استاتور بدون شیار و با سیم‌پیچی غیرهمپوش تمام‌پیچک به کار بردند [۵].

در این مقاله ابتدا سیم‌پیچی غیرهمپوش نیم‌پیچک در ماشین RFAPM تشریح می‌شود و مؤلفه‌های شعاعی و مماسی چگالی شار مغناطیسی بی‌باری، شار پیوندی و نیروی ضد محرکه الکتریکی ناشی از آهنرباهای دائم که از تمام مؤلفه‌های توزیع چگالی هادی سیم‌پیچی استفاده می‌نماید، مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین در این مقاله تاثیر ضریب عرض آهنربا در غیرسینوسی نمودن چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در ناحیه شعاع نامی استاتور، کاهش تعداد زوج قطب‌ها در اشباع مغناطیسی یوغ‌ها و افزایش طول فاصله هوایی که می‌تواند باعث صفر نمودن اعوجاج هارمونیک نیروی ضد محرکه الکتریکی شود، بیان می‌گردد.

#### ۲- مغناطیس دائم و توزیع چگالی هادی سیم‌پیچ

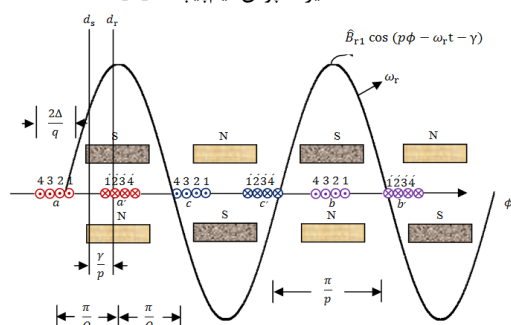
کشف ساماریوم کبالت  $\text{SmCo}_5$  اولین نسل آهنرباهای دائم، راه را برای ساخت ژنراتورها و موتورهای هموار نمود [۶]. مزیت آهنرباهای دائم  $\text{SmCo}_5$  در مقایسه با آهنرباهای دائم آلنیکو عبارتند از: (۱) پسماند بالای چگالی شار مغناطیسی، (۲) منحنی

اصطلاح ماشین الکتریکی بدون هسته شار شعاعی مغناطیس دائم استاتور میانی (RFAPM) بعد از ماشین بدون هسته شار محوری مغناطیس دائم استاتور میانی (AFAPM) مطرح شده‌اند [۱]. تحلیل نیروی ضد محرکه الکتریکی بی‌باری در ماشین‌های مغناطیس دائم در ابتدا با مدل‌سازی مغناطیس دائم به صورت جریان سطحی بر روی سطح آهنرباهای دائم انجام شد [۲]. با حل معادلات شبه پواسن و لاپلاس به ترتیب در آهنرباهای دائم و فاصله هوایی بر حسب پتانسیل بردار مغناطیسی  $\vec{A}$ ، این تحلیل ارائه شد. بولز مدل‌سازی آهنرباهای دائم را با استفاده از بردار مغناطیسی  $\vec{M}$  توسعه داد و مغناطیسی شونده‌گی موازی و شعاعی را در آهنرباهای دائم مدل‌سازی نمود [۳-۴]. معادلات حاکم با استفاده از پتانسیل بردار اسکالر  $\phi$  در دستگاه مختصات استوانه‌ای حل شدند. برای هر دو روش مدل‌سازی، مقدار نفوذپذیری برگشتی آهنرباهای دائم یک در نظر گرفته شد. ژو و همکارانش روش مدل‌سازی را بیشتر توسعه دادند تا نفوذپذیری برگشتی آهنرباهای دائم را شامل شود. آنها این تئوری را برای ماشین‌های شار شعاعی آهنرباهای دائم با



شکل (۱): شمای انفجاری ماشین سه فاز RFAPM با سیم پیچی

غیرهمپوش نیم پیچک [۱]

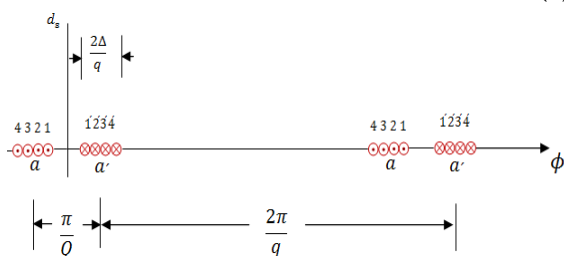


شکل (۲): توزیع سیم پیچی ماشین سه فاز RFAPM با سیم پیچی

غیرهمپوش نیم پیچک

اگر محور  $d_r$  با محور  $d_s$  در یک راستا قرار گیرد، بیشینه شار پیوندی در سیم پیچ حاصل می گردد. همچنین با افزایش گام کلاف طول حلقه انتهایی و شار نشستی کلاف خواهد شد. در این شکل  $\Delta$  برابر  $\tau_q = \pi/Q$ ، می توان شار پیوندی را افزایش داد. اما این به بهای افزایش طول کلاف استاتور است. توزیع سیم پیچی فاز  $a$  با عرض بازوی یک کلاف استاتور  $q/2$  نشان داده شده است. اگر عرض یک بازوی کلاف برابر با  $2\Delta/q$  و  $N$  تعداد هادی های درون هر شیار مجازی استاتور باشد، آن گاه چگالی طولی هادی های هر شیار مجازی استاتور به صورت رابطه (۲) و سری فوریه چگالی طولی هادی فاز  $a$  با توجه به شکل (۴) می تواند به صورت رابطه (۳) نوشته شود.

$$|n_a| = qN/2\Delta \quad (2)$$



شکل (۳): توزیع سیم پیچ های فاز  $a$  ماشین RFAPM با سیم پیچی

غیرهمپوش نیم پیچک

مغناطیس زدایی خطی، (۳) ضریب دمایی پایین. متاسفانه آهنرباهای  $SmCo5$  نسبتاً گران هستند و به همین علت کاربرد آنها محدود گردید که با ظهور ترکیب نئودیم آهن برن  $NdFeB$  این وضعیت را تغییر داد. سرعت گسترش و پیشرفت این ماده در طول چند سال گذشته بسیار سریع بوده است، به طوری که هم اکنون این ماده در ابعاد تجاری از طریق تولیدکنندگان آهنربا قابل دسترسی هستند [۷]. هزینه آهنرباهای دائم  $NdFeB$  در مقایسه با آهنرباهای  $SmCo5$  بسیار کاهش داده شده اند و در عین حال تمام مزایای آهنرباهای دائم  $SmCo5$  را دارا می باشند. کاهش هزینه آهنرباهای دائم  $NdFeB$  به همراه مقادیر مغناطیس زدایی و پسماند بالای چگالی شار مغناطیسی، فرصتی را برای کاربرد آنها در تولید موتورها و ژنراتورهای متوسط تا بزرگ، مهیا کرد که امروزه در صنعت از این نوع آهنربای دائم استفاده زیادی می شود.

در شکل (۱) شمای انفجاری ماشین سه فاز RFAPM با سیم پیچی غیرهمپوش نیم پیچک که دارای ۱۶ قطب می باشد، مشاهده می شود. از آنجایی که اندازه المانها (مش بندی) در سرعت و دقت نتایج شبیه سازی تاثیر مستقیم دارد، امکان شبیه سازی سه بعدی برای کل ماشین با حفظ دقت و سرعت پاسخگویی امکان پذیر نمی باشد و منجر به خطا در نرم افزار می گردد. به همین دلیل در این مقاله از تحلیل دو بعدی استفاده شده است.

قطبها (آهنرباها) بر روی یوغ (روتور) درونی و یوغ (روتور) بیرونی نصب شده اند و سیم پیچ های استاتور در بین این دو روتور واقع شده اند که به این نوع ماشین، ماشین دو روتوره با استاتور میانی بدون شیار نیز می گویند [۸]. همچنین نوع سیم پیچی در این ماشین غیرهمپوش نیم پیچک می باشد [۹]. اگر تعداد کلاف های هر فاز در تمام زوج قطبها با  $q = k_p q$  تعریف شود، آن گاه تعداد تمام کلافها برای یک ماشین سه فاز با  $p$  جفت قطب برابر است با:

$$Q = 3q \quad (1)$$

در این نوع سیم پیچی  $k_q = 0.5$  است. برای ماشین هایی با هسته هوایی، عرض بازوهای کلاف معمولاً عریض تر از ماشین هایی با هسته آهنی هستند. با توجه به نوع سیم پیچی و نحوه قرار گرفتن آهنرباها (قطبها) توزیع سیم پیچی ماشین سه فاز مطرح شده در شکل (۲) ترسیم شده است.

همان طور که در شکل (۲) مشاهده می شود  $\gamma$  زاویه الکتریکی بین محور مغناطیسی روتور  $d_r$  و محور مغناطیسی فاز  $a$  استاتور  $d_s$  است.

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{M}_i = \vec{M}_0 + \chi_m \vec{H} \quad (8)$$

لذا چگالی شار مغناطیسی در مواد مغناطیس دائم می‌تواند به صورت زیر بیان شود.

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_0 \\ &= \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_0 = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_0 \quad (9) \\ &= \mu \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_0 = \mu \vec{H} + \vec{B}_{rem} \end{aligned}$$

بنابراین، بردار پسماند مغناطیسی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{M}_0 = \vec{B}_{rem} / \mu_0 \quad (10)$$

در این رابطه، چگالی شار پسماند  $\vec{B}_{rem}$ ، معمولاً مقدار چگالی شاری است که ماده مغناطیسی می‌تواند تولید کند. اصل موضوعی بدون دیورژانس بودن  $\vec{B}$  توسط معادله (۱۱) تضمین می‌کند که  $\vec{B}$  سلونوئیدی و در نتیجه  $\vec{B}$  می‌تواند به صورت کرل میدان بردار دیگری چون  $\vec{A}$  بیان شود، یعنی:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (11)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (12)$$

که  $\vec{A}$ ، پتانسیل بردار مغناطیسی نامیده می‌شود.  $\vec{A}$ ، در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\vec{A} = A_r \vec{a}_r + A_\phi \vec{a}_\phi + A_z \vec{a}_z \quad (13)$$

با استفاده از معادلات (۹) و (۱۲) داریم:

$$\vec{H} = (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}_0) / \mu = (\nabla \times \vec{A} - \mu_0 \vec{M}_0) / \mu \quad (14)$$

با جایگزینی رابطه (۱۴) در معادله (۵) داریم:

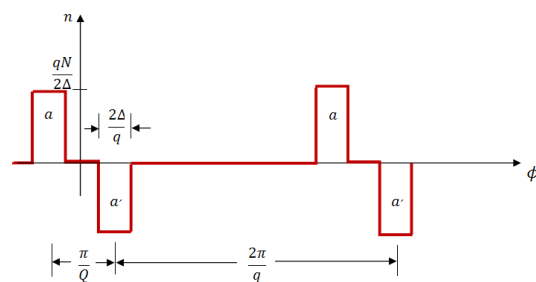
$$\nabla \times ((\nabla \times \vec{A} - \mu_0 \vec{M}_0) / \mu) = \vec{j} \quad (15)$$

در محیط همگن خطی همه‌سو یکسان، ضریب نفوذپذیری  $\mu$  ثابت بوده و با استفاده از پیمان کولمب و ساده‌سازی ریاضی داریم:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j} - \mu_0 (\nabla \times \vec{M}_0) \quad (16)$$

#### ۴- معادله تحلیل ناحیه‌ای در نواحی مختلف

در این بخش، ماشین به چند ناحیه تقسیم می‌شود. نواحی به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که برای هر قسمت بتوان پتانسیل بردار مغناطیسی درون آن ناحیه را توصیف نمود. این نواحی باید به نحوی انتخاب شوند که نفوذپذیری مغناطیسی در هر ناحیه ثابت باشد [۱۳-۱۲]. بنابراین، نواحی با دایره هم‌مرکز با شعاع‌های



شکل (۴): چگالی هادی فاز  $a$  ماشین RFAPM با سیم‌پیچی غیرهمپوش نیم‌پیچک

$$n_a(\phi) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(mq\phi) \quad (3)$$

$$b_m = -2qN \sin\left(\frac{m\pi}{6}\right) \sin(m\Delta) / (m\pi\Delta) = -2qNk_\omega / \pi$$

$$k_\omega = k_p k_s, k_p = \sin(m\pi/6), k_s = \sin(m\Delta) / m\Delta$$

در شکل (۴) چگالی هادی مثبت نشان‌دهنده هادی‌هایی که جریان آنها از صفحه خارج و چگالی هادی منفی نشان‌دهنده هادی‌هایی که جریان آنها وارد صفحه می‌شوند.

#### ۳- معادله اساسی تحلیل ناحیه‌ای ماشین

قانون اساسی القای الکترومغناطیسی بیان می‌کند که هر میدان مغناطیسی تغییرپذیر با زمان، یک میدان الکتریکی را ایجاد می‌کند [۱۰]. در شرایط مغناطیسی ساکن یا شبه ساکن، چگالی جریان جابجایی  $\partial \vec{D} / \partial t = \partial \vec{E} / \partial t$  قابل صرف‌نظر کردن است. به عبارتی در محیط همگن خطی ضریب نفوذپذیری  $\epsilon$  ثابت خواهد بود و در نتیجه مشتق زمانی میدان جابجایی در مقایسه با  $\vec{j}$  ناچیز است [۱۱].

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \partial \vec{D} / \partial t \quad (4)$$

بنابراین، معادله (۴) به صورت زیر به قانون آمپر کاهش می‌یابد.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \quad (5)$$

بردار مغناطیسی القاء شده در یک محیط خطی همگن می‌تواند بر حسب شدت میدان مغناطیسی به صورت زیر نوشته شود.

$$\vec{M}_i = \chi_m \vec{H} \quad (6)$$

لذا چگالی شار مغناطیسی بر حسب شدت میدان مغناطیسی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_i = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (7)$$

چون در مواد مغناطیس دائم، بردار مغناطیسی برابر با مجموع بردار پسماند مغناطیسی و بردار مغناطیسی القاء شده است، داریم:

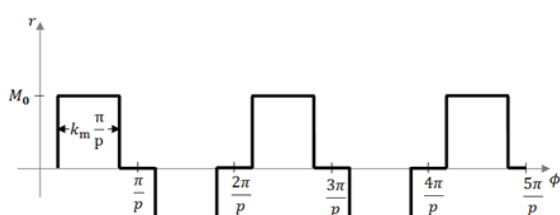
سری فوریه مشتق بردار پسماند مغناطیسی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f(\phi) = \frac{\partial M_0}{\partial \phi} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} a_m \cos(m p \phi) \quad (19)$$

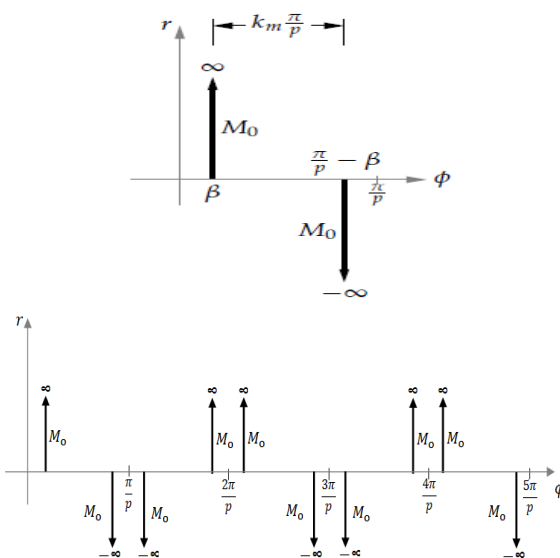
$$a_m = \frac{2p}{\pi} \int_0^{\pi/p} f(\phi) \cos(m p \phi) d\phi$$

$$= \frac{2p}{\pi} \int_0^{\pi/p} M_0 \cos(m p \phi) \left[ \delta\left(\phi - \beta\right) - \delta\left(\phi - \left(\frac{\pi}{p} - \beta\right)\right) \right] d\phi$$

$$= \frac{4p M_0}{\pi} \cos(m p \beta)$$



شکل (۶): بردار پسماند مغناطیسی آهنرباهای دائم نسبت به  $\phi$



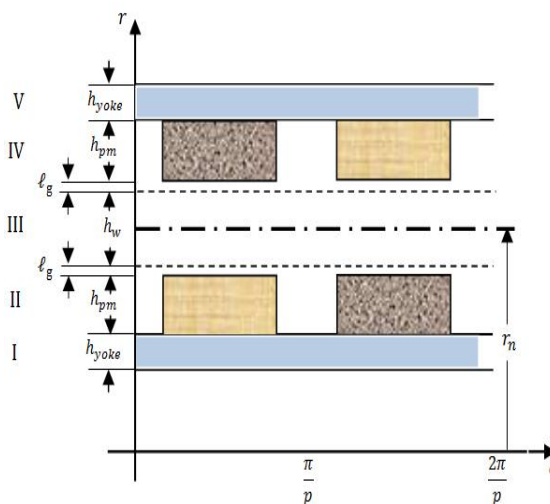
شکل (۷): مشتق بردار پسماند مغناطیسی آهنربای دائم نسبت به  $\phi$

در شکل (۶) ضریب عرض آهنربا با  $k_m$  گام قطب با  $\tau_p = \pi/p$  و فواصل آهنربا با  $2\beta = (1 - k_m) \pi/p$  تعریف شده است. پس:

$$\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \frac{4p M_0}{\pi r} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos(m p \beta) \cos(m p \phi) \vec{a}_z \quad (20)$$

و به صورت دیفرانسیل جزئی در مختصات استوانه‌ای عبارتند از:

مختلف تعریف می‌شوند. نواحی مختلف ماشین RFAPM با گسترش خطی در شکل (۵) نشان داده شده‌اند. دیمانسیون محور مماسی بین نواحی مختلف  $\phi$ ، بر حسب رادیان الکتریکی می‌باشد. معادله (۱۶) در جدول (۱) برای نواحی مختلف با توجه به مقدار  $\vec{M}_0$  در هر ناحیه ارائه شده است. چون هدف این تحقیق تحلیل چگالی شار مغناطیسی بی‌باری است لذا  $\vec{J} = 0$  فرض شده است.



شکل (۵): نمایش خطی نواحی مختلف ماشین RFAPM

جدول (۱): معادله تحلیل ناحیه‌ای در نواحی مختلف ماشین RFAPM

ناحیه	ناحیه	$\mu_r$	معادله تحلیل ناحیه‌ای
I	یوغ درونی	$\mu_y$	$\nabla^2 \vec{A} = 0$
II	آهنربای دائم روتور درونی	۱	$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 (\nabla \times \vec{M}_0)$
III	فاصله هوایی	۱	$\nabla^2 \vec{A} = 0$
IV	آهنربای دائم روتور بیرونی	۱	$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 (\nabla \times \vec{M}_0)$
V	یوغ بیرونی	$\mu_y$	$\nabla^2 \vec{A} = 0$

## ۵- پاسخ معادله تحلیل ناحیه‌ای در نواحی مختلف

تنها تفاوت بین ناحیه آهنربای دائم (نواحی II و IV) با سایر نواحی این است که در ناحیه آهنربای دائم، بردار پسماند مغناطیسی آهنرباهای دائم غیر صفر است. در این تحقیق بردار پسماند مغناطیسی، به صورت شعاعی با رابطه (۲۸) مدل می‌شود.

$$\vec{M}_0 = M_0 \vec{a}_r \quad (17)$$

پس داریم:

$$\nabla \times \vec{M}_0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial M_0}{\partial \phi} \vec{a}_z \quad (18)$$

با توجه به جهت بردار  $\nabla \times \vec{M}_0$  داریم:  $A_\phi = A_r = 0$ . بردار پسماند مغناطیسی فرض شده و مشتق آن در شکل‌های (۶ و ۷) برای نواحی II و IV نشان داده شده است.

می‌شوند. هر مرز بین دو ناحیه (با معادلات (۲۶ و ۲۹)) به دو معادله تبدیل می‌شود. لذا برای مرزهای  $r_2$  تا  $r_5$ ، هشت معادله حاصل می‌شود و دو معادله نیز از  $A_z(r_1, \phi) = A_z(r_6, \phi) = 0$  به دست می‌آید. سپس این معادلات را به فرم ماتریسی نوشته و ضرایب مجهول  $C_m$  و  $D_m$  نواحی مختلف، به‌ازاء مقادیر مختلف  $m$  محاسبه می‌شود. در ادامه با جایگزینی این ضرایب در بردار پتانسیل مغناطیسی و به کمک معادله (۲۴)، مؤلفه‌های چگالی شار مغناطیسی در نواحی مختلف بدست می‌آید که در پیوست مقاله خلاصه این روابط آمده است.

$$r_1 = r_n - 0.5h_w - \ell_g - h_{pm} - h_{yoke} \quad (30)$$

$$r_2 = r_n - 0.5h_w - \ell_g - h_{pm} \quad (31)$$

$$r_3 = r_n - 0.5h_w, \quad r_{cim} = r_2 + 0.5h_{pm} \quad (32)$$

$$r_4 = r_n + 0.5h_w, \quad r_{com} = r_5 - 0.5h_{pm} \quad (33)$$

$$r_5 = r_n + 0.5h_w + \ell_g + h_{pm} \quad (34)$$

$$r_6 = r_n + 0.5h_w + \ell_g + h_{pm} + h_{yoke} \quad (35)$$

## ۷- شار پیوندی و نیروی ضد محرکه الکتریکی

شار پیوندی ناشی از آهنربای دائم در فازهای سیم‌پیچی استاتور (سیم‌پیچ غیرهمپوش نیم‌پیچک)، به کمک مؤلفه شعاعی چگالی شار مغناطیسی بی‌باری (معادله ۱۱- پ و ۱۲- پ یا معادله ۳۶) محاسبه می‌شود. جهت محاسبه کل شار پیوندی فاز  $a$ ، ابتدا باید شار پیوندی یک حلقه این فاز را محاسبه نمود. در شکل (۸) درونی‌ترین حلقه و بیرونی‌ترین حلقه یک کلاف فاز  $a$ ، نشان داده شده است.

$$B_{r|PM}(r, \phi_r = \phi_s - \omega_r t) = \sum_{m=1,3,\dots} \hat{B}_{rm} \sin mp(\phi_s - \omega_r t) \quad (36)$$

$\hat{B}_{rm}$  مقدار بیشینه مؤلفه شعاعی  $m$ ام چگالی شار مغناطیسی بی‌باری می‌باشد. اگر زاویه مماسی بین وسط عرض هر شیار مجازی با هادی درونی‌ترین حلقه همان شیار با  $\delta$  نامگذاری شود آن‌گاه شار پیوندی درونی‌ترین حلقه از این کلاف می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$\lambda_{a|PM}(\delta) = \int_{-0.5\tau_q + \delta}^{0.5\tau_q - \delta} B_r(r, \phi_s - \omega_r t) r_n \ell d\phi_s \\ = \sum_{m=1,3,\dots} \hat{B}_{rm} \frac{r_n \ell}{mp} [\cos mp(\delta - 0.5\tau_q - \theta_r) - \cos mp(0.5\tau_q - \delta - \theta_r)] \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2} \\ = \frac{4p\mu_0 M_0}{\pi r} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \cos(mp\beta) \cos(mp\phi) \quad (21)$$

پاسخ عمومی و خصوصی معادله (۲۲) به ترتیب عبارتند از:

$$A_{gen} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos(mp\phi) [C_m r^{mp} + D_m r^{-mp}] \quad (22)$$

$$A_{part} = \sum_{m=1,3,5,\dots} G_m \cos(mp\phi) \quad (23)$$

$$G_m = -\frac{4r B_{rem} \cos(mp\beta)}{m^2 p \pi}$$

بنابراین پاسخ معادله تحلیل ناحیه‌ای در نواحی I، III و V برابر  $A_z = A_{gen} + A_{part}$  و در نواحی II و IV برابر  $A_z = A_{gen}$  است.

## ۶- چگالی شار مغناطیسی در نواحی مختلف

رابطه چگالی شار مغناطیسی و پتانسیل بردار مغناطیسی در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \vec{a}_r - \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{a}_\phi = B_r \vec{a}_r + B_\phi \vec{a}_\phi \quad (24)$$

با توجه به این که مؤلفه شعاعی چگالی شار مغناطیسی در مرز بین دو ناحیه  $i$  و  $j$  با هم برابر است داریم:

$$B_r^{(i)} = B_r^{(j)} \quad (25)$$

$$\frac{\partial A_z^{(i)}}{\partial \phi} = \frac{\partial A_z^{(j)}}{\partial \phi} \quad (26)$$

همچنین چون مؤلفه مماسی شدت میدان مغناطیسی در مرز دو ناحیه  $i$  و  $j$  بدون چگالی جریان سطحی نیز با هم برابراند، داریم:

$$H_\phi^{(i)} = H_\phi^{(j)} \quad (27)$$

اگر ناحیه  $j$  مغناطیس دائم باشد داریم:

$$\frac{B_\phi^{(i)}}{\mu^{(i)}} = \frac{B_\phi^{(j)}}{\mu^{(j)}} - \frac{B_{rem\phi}}{\mu^{(j)}} \quad (28)$$

در این تحقیق مؤلفه مماسی چگالی شار پسماند  $B_{rem\phi}$ ، با توجه به بردار پسماند مغناطیس که شعاعی فرض شده، صفر است. بنابراین، معادله فوق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{1}{\mu^{(i)}} \frac{\partial A_z^{(i)}}{\partial r} = \frac{1}{\mu^{(j)}} \frac{\partial A_z^{(j)}}{\partial r} \quad (29)$$

مرزهای نواحی مختلف به صورت معادلات (۳۵-۳۰) تعریف

$$\Lambda_{a|PM}(t) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} |\Lambda_m| \sin(mp\omega_r t) \quad (40)$$

$$\Lambda_{b|PM}(t) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} |\Lambda_m| \sin(mp\omega_r t - \frac{2\pi}{3}) \quad (41)$$

$$\Lambda_{c|PM}(t) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} |\Lambda_m| \sin(mp\omega_r t - \frac{4\pi}{3}) \quad (42)$$

از طرفی نیروی ضد محرکه الکتریکی را نیز می توان از مشتق شارهای پیوندی محاسبه نمود:

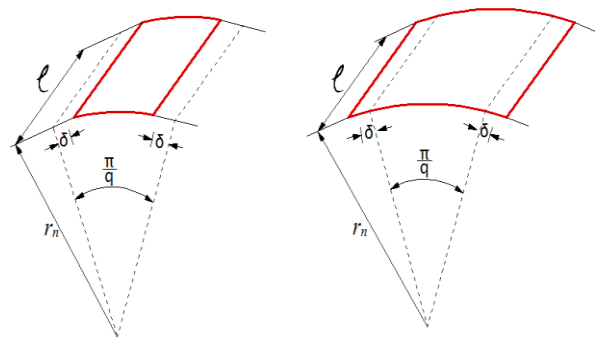
$$e_{a|PM}(t) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} |\Lambda_m| mp\omega_r \cos(mp\omega_r t) \quad (43)$$

$$e_{b|PM}(t) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} |\Lambda_m| mp\omega_r \cos(mp\omega_r t - \frac{2\pi}{3}) \quad (44)$$

$$e_{c|PM}(t) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} |\Lambda_m| mp\omega_r \cos(mp\omega_r t - \frac{4\pi}{3}) \quad (45)$$

### ۸- نتایج شبیه سازی

پارامترهای ماشین RFAPM شبیه سازی شده در جدول (۲) آمده است. در این مقاله با استفاده از این مقادیر روابط تحلیلی ماشین با نتایج عددی المان محدود FE اعتبارسنجی می شوند. در شکل (۹) کانتور دامنه چگالی شار مغناطیسی بی باری حاصل از FEA از طریق نرم افزار ماکسول نشان داده شده است. مقایسه دامنه چگالی شار مغناطیسی بی باری از نتایج تحلیلی و المان محدود در جدول (۳) آمده است. از شکل های (۱۰ و ۱۱) مؤلفه های شعاعی و مماسی چگالی شار مغناطیسی بی باری در وسط آهنرباهای درونی و بیرونی و شعاع نامی استاتور نشان داده شده است. مشاهده می شود که این نتایج مطابقت زیادی با هم دارند. لازم بذکر است که در جواب روابط تحلیلی فقط تا هارمونیک سیزدهم محاسبه شده و احتساب هارمونیک های بالاتر می تواند انطباق بهتری را با نتایج عددی المان محدود به همراه داشته باشد. از جدول (۳) مشاهده می گردد که متوسط درصد خطای بین دامنه چگالی شار مغناطیسی بی باری بین نتایج تحلیلی و نرم افزار ماکسول ۳ درصد است. همان طور که در شکل (۱۰) دیده می شود که مؤلفه شعاعی چگالی شار مغناطیسی بی باری درون آهنربای دائم بر روی هر یک از یوغ های روتور درونی یا روتور بیرونی تقریباً یکسان می باشد. با توجه به شکل (۱۱) مؤلفه مماسی چگالی شار مغناطیسی بی باری حاصل از نتایج نرم افزار ماکسول و نتایج تحلیلی با یکدیگر همگرایی بیشتری دارند.



شکل (۸): بیرونی ترین و درونی ترین حلقه یک کلاف فاز a استاتور ماشین RFAPM

سپس شار پیوندی متوسط برای کلاف محاسبه می شود:

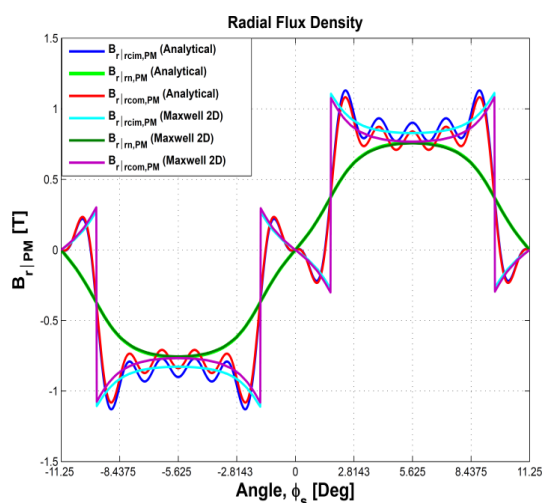
$$\Phi_{a|PM} = \frac{q}{2\Delta} \int_{-\Delta/q}^{\Delta/q} \lambda_{a|PM}(\delta) d\delta \quad (38)$$

سپس از حاصل ضرب شار پیوندی متوسط هر کلاف N دوری در تعداد کلاف های سری شده (q/a)، شار پیوندی فاز a به دست می آید. a تعداد مسیره های موازی در یک فاز می باشد.

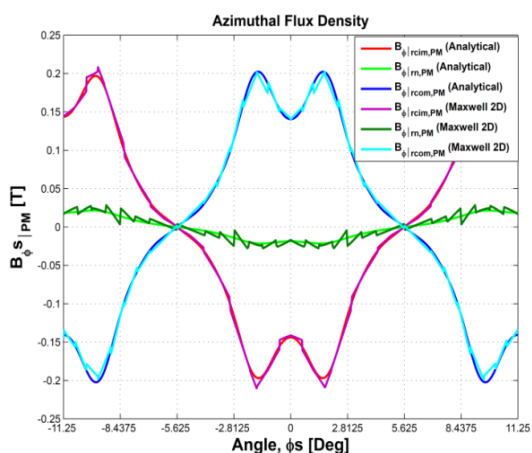
$$\begin{aligned} \Lambda_{a|PM}(t) &= \frac{q}{a} N \Phi_{a|PM} \\ &= \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \hat{B}_{rm} \left( \frac{2q}{a} \right) \left( \frac{Nq}{2\Delta} \right) \left( \frac{r_n \ell}{m^2 p^2} \right) \left[ \cos mp \left( \frac{\Delta}{q} + \frac{\tau_q}{2} \right) - \cos mp \left( \frac{\Delta}{q} - \frac{\tau_q}{2} \right) \right] \sin(mp\omega_r t) \\ &= \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} |\Lambda_m| \sin(mp\omega_r t) \end{aligned} \quad (39)$$

در [۱۴]، ضریب شیار و ضریب گام سیم پیچی از محاسبه شار پیوندی ناشی از مؤلفه اصلی چگالی شار مغناطیسی به ترتیب برابر از توزیع چگالی هادی سیم پیچی، این ضرائب محاسبه شوند رابطه (۳) حاصل می گردد. این ضرائب به ازاء  $m = 2$ ،  $k_q = 0.5$  دقیقاً یکسان می باشند. در نتیجه می توان بیان نمود که مؤلفه کاری توزیع چگالی هادی سیم پیچی که شار پیوندی یکسانی ناشی از مؤلفه اصلی چگالی شار مغناطیسی ایجاد می کند همان، مؤلفه دوم توزیع چگالی هادی است. اما برای محاسبه دقیق شار پیوندی و نیروی ضد محرکه الکتریکی ناشی از آهنربای دائم باید تمام مؤلفه های توزیع چگالی هادی سیم پیچی در نظر گرفته شود. ارائه روابط دقیق شار پیوندی ناشی از آهنربای دائم و مطالعه مسئله اشباع مغناطیسی و نیز تعیین ضریب عرض آهنربا مناسب جزء نوآوری های مقاله است. مشاهده می شود که مقدار شار پیوندی به موقعیت روتور وابسته است و در سیستم سه فاز متعادل می توان شار پیوندی هر فاز را به صورت زیر بیان نمود:

مغناطیسی بی‌باری در نواحی مختلف ماشین یکسان نمی‌باشد. به عنوان مثال در شکل (۱۳) دامنه چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در یوغ‌های روتور تقریباً بین  $0.4 [T]$  تا  $1.75 [T]$  متغیر است. در شکل (۱۴) دامنه چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در یوغ‌های روتور یک ماشین با  $p = 8$  نشان داده می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود با کاهش تعداد زوج قطب‌ها، احتمال اشباع مغناطیسی در یوغ‌های درونی و بیرونی ماشین به دلیل افزایش  $G_m$  و  $r^{-mp}$  با کاهش  $p$  بیشتر می‌شود.



شکل (۱۰): مؤلفه شعاعی چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در وسط آهنرباهای دائم (نواحی ۲ و ۴) و در شعاع نامی استاتور (وسط ناحیه ۳)

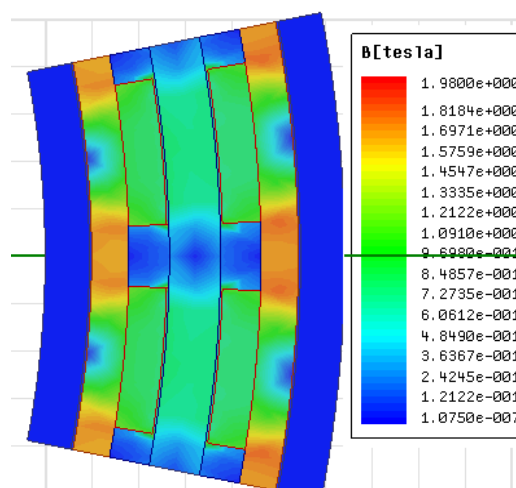


شکل (۱۱): مؤلفه مماسی چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در وسط آهنرباهای دائم (نواحی ۲ و ۴) و در شعاع نامی استاتور (وسط ناحیه ۳)

همان‌طور که در شکل (۱۵) نشان داده شده است مؤلفه شعاعی چگالی شار مغناطیسی در شعاع نامی استاتور ( $r = r_n$ ) تقریباً سینوسی می‌باشد. در این شکل نتایج تحلیلی مؤلفه شعاعی چگالی شار مغناطیسی بر روی سطح درونی استاتور ( $r_{h1} = r_n - 0.5h$ ) و سطح بیرونی استاتور ( $r_{h2} = r_n + 0.5h$ ) با نتایج المان محدود انطباق زیادی دارند همچنین دامنه چگالی شار مغناطیسی بی‌باری نیز در شکل (۱۶) همین موضوع را نمایش

جدول (۲): پارامترها و شرح علائم اختصاری ماشین RFAPM

شرح پارامتر	سمبل	مقدار
تعداد زوج قطب‌های ماشین	$p$	۱۶
تعداد کلاف‌ها در هر فاز	$q$	۸
شعاع نامی استاتور	$r_n$	۲۳۲ mm
طول محوری استاتور	$\ell$	۷۶ mm
ضخامت یا ارتفاع سیم‌پیچ استاتور	$h_w$	۱۰ mm
ضخامت آهنربای دائم	$h_{pm}$	۸/۲ mm
ضخامت یوغ روتور	$h_{yoke}$	۱۰ mm
طول فاصله هوایی	$\ell_g$	۱ mm
$\frac{q}{2}$ عرض بازوی یک کلاف استاتور	$\Delta$	۰/۰۵۶ rad
تعداد مسیرهای موازی	$a$	۱
نسبت کلاف‌های هر فاز به تعداد زوج قطب‌ها	$k_q$	۰/۵
ضریب عرض آهنربا	$k_m$	۰/۷۴

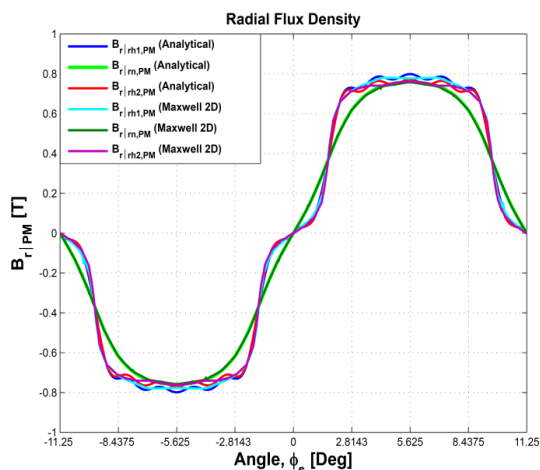


شکل (۹): کانتور چگالی شار مغناطیسی بی‌باری حاصل از نرم‌افزار ماکسول

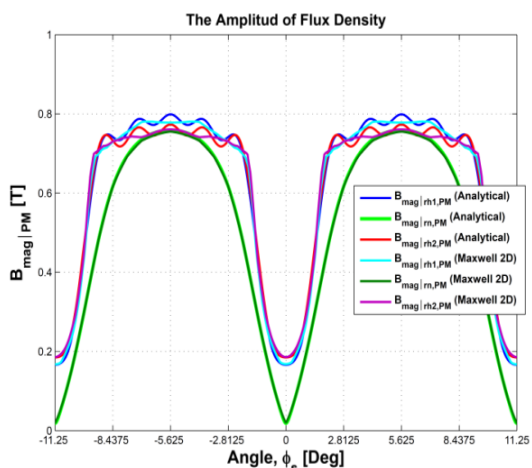
جدول (۳): مقایسه نتایج تحلیلی و المان محدود دامنه چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در وسط آهنرباهای دائم (وسط ناحیه ۲)

درصد خطا	چگالی شار ماکسول [T]	چگالی شار تحلیلی [T]	$\phi_s [Deg]$
۰	۰/۱۴۳	۰/۱۴۳	۰
۵	۰/۲۶۴	۰/۲۷۸	۱/۵
۵/۱	۰/۹۲	۰/۹۷	۲/۸
۴/۴	۰/۸۶	۰/۹	۴/۲
۴/۵	۰/۸۳	۰/۸۷	۵/۶
۴/۴	۰/۸۶	۰/۹	۷/۱
۴	۰/۹۴	۰/۹۸	۸/۵
۰	۰/۲۴۸	۰/۲۴۸	۱۰
۰	۰/۱۴۳	۰/۱۴۳	۱۱/۲۵

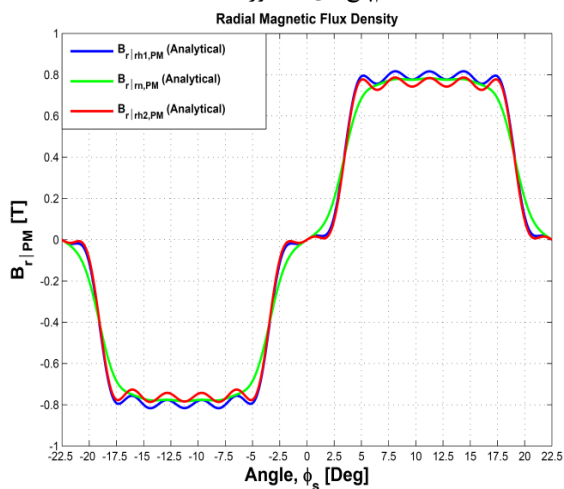
شکل‌های (۱۲) و (۱۳) نشان می‌دهند که دامنه چگالی شار



شکل (۱۵): مؤلفه شعاعی چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در سیم‌پیچ‌های استاتور (ناحیه ۳)



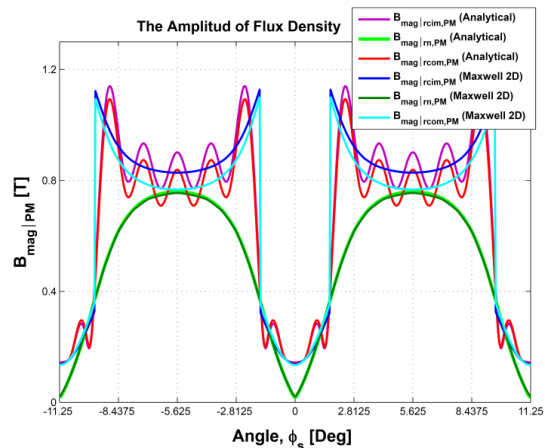
شکل (۱۶): دامنه چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در سیم‌پیچ‌های استاتور (ناحیه ۳)



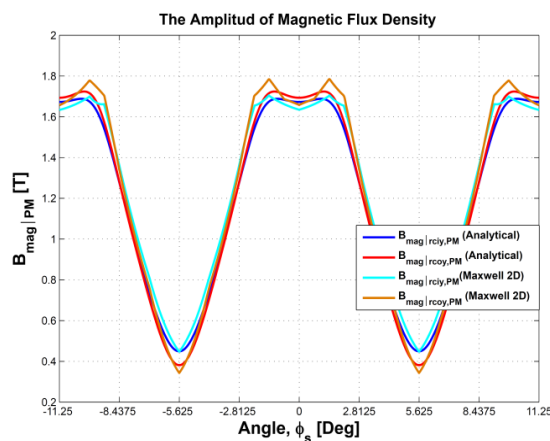
شکل (۱۷): مؤلفه شعاعی چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در سیم‌پیچ‌های استاتور ماشین RFAPM با  $p = 8$  (ناحیه ۳)

در شکل‌های (۱۸ و ۱۹) شار پیوندی و نیروی ضد‌محركه الکتریکی تحلیلی با در نظر گرفتن تمام مؤلفه‌های هارمونیک (تا

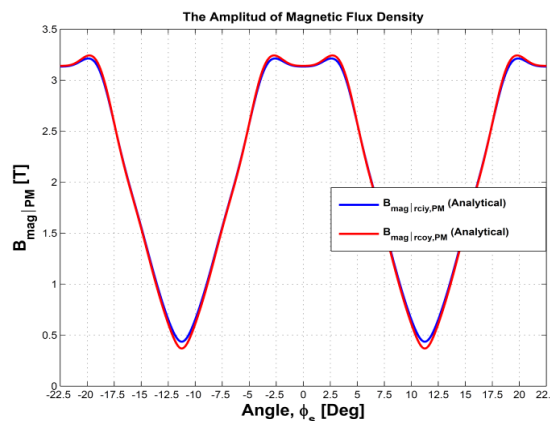
می‌دهند. در شکل (۱۷) نشان داده می‌شود که مؤلفه شعاعی چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در  $r = r_n$  و  $r_{h1}$  و  $r_{h2}$  با کاهش تعداد زوج قطبها ( $p = 8$ ) و ثابت بودن پارامترهای دیگر ماشین، دوزنقه‌ای شده و این موضوع می‌تواند سبب نیروی ضد محركه الکتریکی غیرسینوسی گردد.



شکل (۱۸): دامنه چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در وسط آهنرباهای دائم (وسط نواحی ۲ و ۴) و در شعاع نامی استاتور (وسط ناحیه ۳)



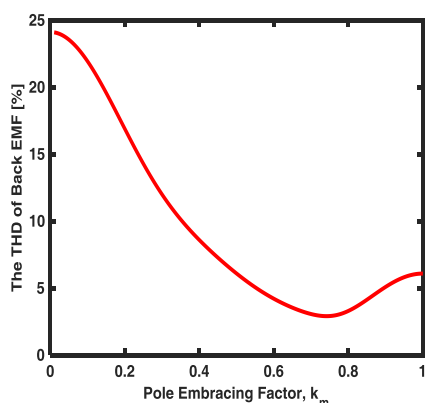
شکل (۱۹): دامنه چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در وسط یوغ‌های روتور (نواحی ۱ و ۵)



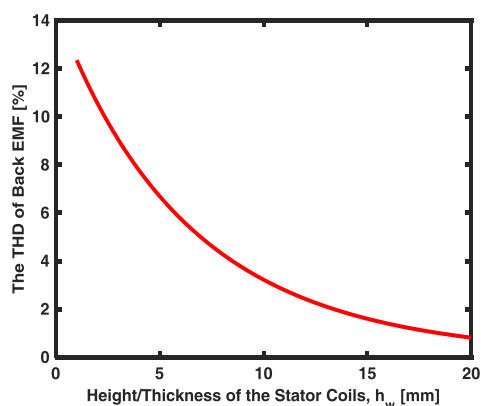
شکل (۲۰): دامنه چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در مرکز یوغ‌های روتور ماشین RFAPM با  $p = 8$  (نواحی ۱ و ۵)



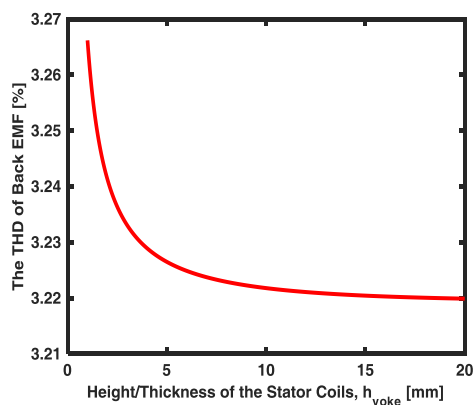
در ماشین‌های آهنربای دائم ضریب عرض آهنربا  $k_m$ ، ضخامت یا ارتفاع سیم‌پیچ استاتور  $h_w$ ، ضخامت آهنربای دائم  $h_{pm}$ ، ضخامت یوغ روتور  $h_{yoke}$  و طول فاصله هوایی  $l_g$  در اعوجاج هارمونیک نیروی ضد محرکه الکتریکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در شکل‌های (۲۱-۲۴) این موضوع به تصویر کشیده شده است و انتخاب بهینه این مقادیر می‌تواند در سینوسی نمودن نیروی ضد محرکه الکتریکی (کاهش اعوجاج هارمونیک آن) کمک شایانی نماید.



شکل (۲۱): اعوجاج هارمونیک نیروی ضد محرکه الکتریکی ماشین برحسب ضریب عرض آهنربا،  $k_m$

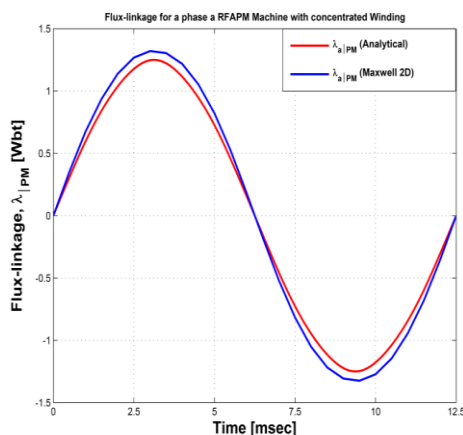


شکل (۲۲): اعوجاج هارمونیک نیروی ضد محرکه الکتریکی ماشین برحسب ارتفاع سیم‌پیچ استاتور،  $h_w$

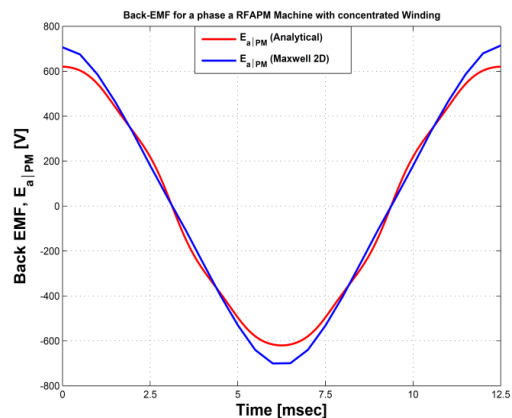


شکل (۲۳): اعوجاج هارمونیک نیروی ضد محرکه الکتریکی ماشین برحسب ضخامت یوغ روتور،  $h_{yoke}$

هارمونیک سیزدهم) با نتایج المان محدود با هم مقایسه گردیده است.

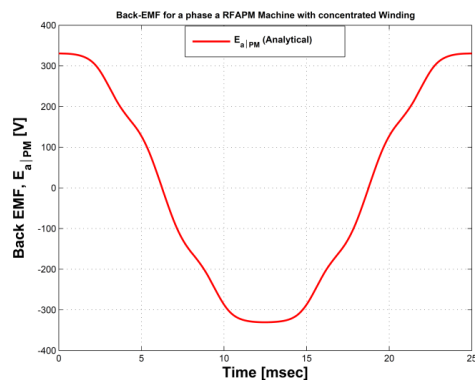


شکل (۱۸): مقایسه شار پیوندی فاز  $a$  ماشین RFAPM نتایج المان محدود با نتایج تحلیلی ناشی از تمام مؤلفه‌ها



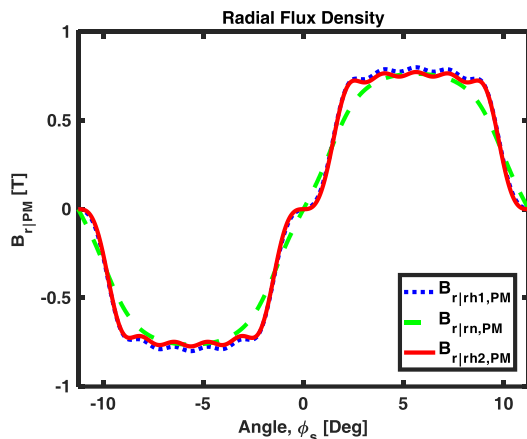
شکل (۱۹): مقایسه نیروی ضد محرکه الکتریکی فاز  $a$  ماشین RFAPM نتایج المان محدود با نتایج تحلیلی ناشی از تمام مؤلفه‌ها

نیروی ضد محرکه الکتریکی ماشین RFAPM همانند ماشین BLAC با احتساب جمیع مؤلفه‌های هارمونیک کاملاً سینوسی می‌باشد. از شکل (۲۰) مشاهده می‌گردد که نیروی ضد محرکه الکتریکی در ماشینی با  $p = 8$  و با  $p = 16$  (شکل (۱۹)) هم از لحاظ دامنه و هم از لحاظ شکل موج کاملاً متفاوت است.

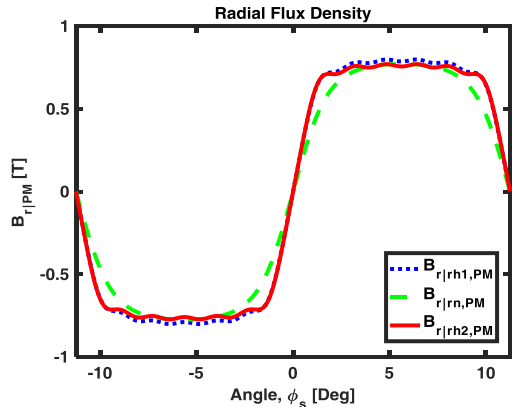


شکل (۲۰): نیروی ضد محرکه الکتریکی فاز  $a$  ماشین RFAPM با  $p = 8$

ضخامت یوغ روتور صورت می‌گیرد. همچنین از شکل (۲۴) و (۲۵) مشاهده می‌شود که همگرایی اعوجاج هارمونیک نیروی ضد محرکه الکتریکی به سمت صفر بیشتر با افزایش طول فاصله هوایی نسبت به ارتفاع آهنربای دائم، وابسته است. از اشکال (۲۶) الی (۲۸) مشاهده می‌شود که مؤلفه شعاعی چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در شعاع نامی سیم‌پیچ‌های استاتور با  $k_m = 0.74$  سینوسی‌تر است.



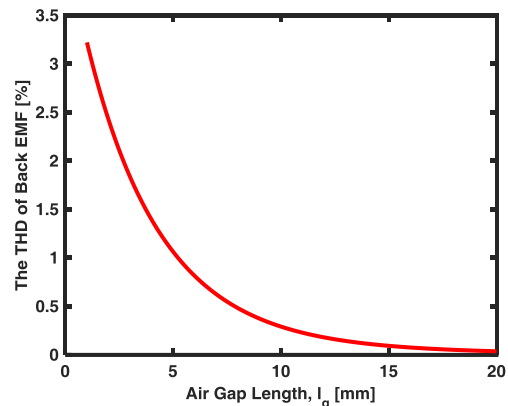
شکل (۲۷): مؤلفه شعاعی چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در سیم‌پیچ‌های استاتور ماشین RFAPM با  $k_m = 0.74$  (ناحیه ۳)



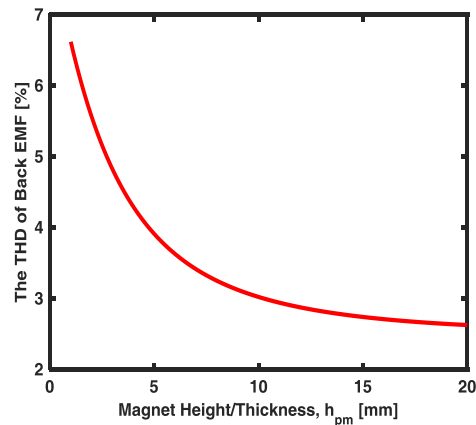
شکل (۲۸): مؤلفه شعاعی چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در سیم‌پیچ‌های استاتور ماشین RFAPM با  $k_m = 0.9$  (ناحیه ۳)

## ۹- نتیجه‌گیری

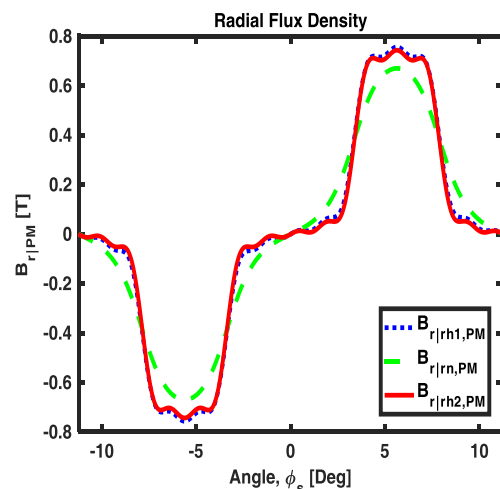
در این مقاله روابط تحلیلی چگالی شار مغناطیسی بی‌باری، شار پیوندی و ولتاژ القایی ماشین RFAPM به کمک معادلات ماکسول با تحلیل ناحیه‌ای ارائه شد. در اعتبارسنجی این روابط با نتایج المان محدود در مؤلفه‌های شعاعی و مماسی چگالی شار مغناطیسی اختلاف حدود ۳ درصد مشاهده گردید. نشان داده شد که کاهش تعداد زوج قطب‌های ماشین می‌تواند موجب اشباع مغناطیسی در یوغ درونی یا بیرونی گردد. همچنین این موضوع موجب غیرسینوسی شدن ولتاژ القایی نیز می‌شود.



شکل (۲۴): اعوجاج هارمونیک نیروی ضد محرکه الکتریکی ماشین بر حسب طول فاصله هوایی،  $l_g$



شکل (۲۵): اعوجاج هارمونیک نیروی ضد محرکه الکتریکی ماشین بر حسب ارتفاع آهنربای دائم،  $h_{pm}$



شکل (۲۶): مؤلفه شعاعی چگالی شار مغناطیسی بی‌باری در سیم‌پیچ‌های استاتور ماشین RFAPM با  $k_m = 0.4$  (ناحیه ۳)

همان‌طور که در شکل (۲۱) نشان داده شده است ضریب عرض آهنربای بهینه  $k_m = 0.74$  می‌باشد. در شکل‌های (۲۲-۲۳) مشاهده می‌شود که بیشترین و کمترین کاهش اعوجاج هارمونیک نیروی ضد محرکه الکتریکی با افزایش ارتفاع سیم‌پیچ استاتور و

- [12] V. Zamani Faradonbeh and M. R. Alizadeh Pahlavani, "Optimal Pole-Shaping in Surface-Mounted PM Machines using Analytical Modeling: Cogging Torque and Flux Density Harmonics," *Journal of Applied Electromagnetics*, vol. 2, 2015 (Serial No. 4).
- [13] P. J. Randewijk and M. J. Kamper, "Analytical Analysis of a Radial Flux Air-Cored Permanent Magnet Machines with a Double Sided Rotor and non-overlapping Double Layer Windings," In: *Electrical Machines (ICEM)*, 2012.
- [14] P. J. Randewijk, "Analysis of Radial Flux Air-Cored Permanent Magnet Machines with a Double sided Rotor and non-overlapping Windin," Dissertation presented for the deg. doc. of phil., 2012.

### پیوست:

سمبل	شرح پارامتر
$p$	تعداد زوج قطب‌های ماشین
$q$	تعداد کلاف‌های هر فاز ماشین
$\Delta$	$\frac{q}{2}$ عرض یک بازوی کلاف استاتور [rad]
$\tau_p$	گام قطب [rad]
$\tau_q$	گام کلاف [rad]
$\delta$	زاویه اندازه‌گیری شده از مرکز تا بازوی کلاف [rad]
$k_q$	نسبت تعداد کلاف‌های هر فاز به تعداد زوج قطب‌ها
$a$	تعداد مسیرهای موازی در هر فاز
$k_w$	ضریب سیم‌پیچی
$k_p$	ضریب گام سیم‌پیچی
$k_s$	ضریب شیار
$M$	بردار مغناطیس‌پذیری [A/m]
$M_O$	بردار پسماند مغناطیسی [At/m]
$M_i$	مغناطیس‌القاء شده [At/m]
$B_{rem}$	چگالی شار پسماند در آهنرباهای دائم [T]
$\chi_m$	قابلیت مغناطیسی
$k_m$	ضریب عرض آهنربا
$r_n$	شعاع نامی استاتور [m]
$r_{cim}$	شعاع مرکز آهنربای داخلی [m]
$r_{civ}$	شعاع مرکز یوغ داخلی [m]

سمبل	شرح پارامتر
$r_{com}$	شعاع مرکز آهنربای بیرونی [m]
$r_{coy}$	شعاع مرکز یوغ بیرونی [m]
$r_{h1}$	شعاع سطح درونی سیم‌پیچ استاتور
$r_{h2}$	شعاع سطح بیرونی سیم‌پیچ استاتور
$\lambda_1$	شار پیوندی یک دور سیم‌پیچی [Wb-turns]
$\Lambda$	شار پیوندی در هر فاز [Wb-turns]
$\hat{B}_{rm}$	دامنه چگالی شار شعاعی هارمونیک $m$ ام [T]
$B_{r,PM}$	مؤلفه شعاعی چگالی شار مغناطیسی [T]
$B_{\phi,PM}$	مؤلفه مماسی چگالی شار مغناطیسی [T]
$N$	تعداد هادی‌های درون هر شیار مجازی استاتور
$\vec{H}$	شدت میدان مغناطیسی [At/m]

وابستگی اعوجاج هارمونیکی نیروی ضد محرکه الکتریکی با پارامترهای ماشین از قبیل ضریب عرض آهنربا  $k_m$ ، ضخامت یا ارتفاع سیم‌پیچ استاتور  $h_w$ ، ضخامت آهنربای دائم  $h_{pm}$ ، ضخامت یوغ روتور  $h_{yoke}$  و طول فاصله هوایی  $l_g$  از سرفصل‌های تحقیقاتی دیگر این مقاله است.

### ۱۰- مراجع

- [1] M. R. Alizadeh Pahlavani and B. Shirali, "Analytical Design of On load Magnetic Flux Density and Flux-linkage in Radial Flux Air-cored Permanent Magnet Electrical Machine with a Double-sided Rotor," *Journal of Applied Electromagnetics*, vol. 3, no. 2, 2015.
- [2] N. Boules, "Two-Dimensional Field Analysis of Cylindrical Machines with Permanent Magnet Excitation," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol. IA-20, no. 5, pp. 1267–1277, 1984. ISSN 0093-9994. 3.2.
- [3] N. Boules, "Prediction of No-Load Flux Density Distribution in Permanent Magnet Machines," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol. IA-21, no. 3, pp. 633–643, 1985. ISSN 0093-9994. 3.2, 3.4, 3.6.3, B.
- [4] Z. Tian, C. Zhang, and S. Zhang, "Analytical Calculation of Magnetic Field Distribution and Stator Iron Losses for Surface-Mounted Permanent Magnet Synchronous Machines," *Energies* 2017. 10,320;doi:10.3390/en10030320.
- [5] Z. Q. Zhu, D. Howe, E. Bolte, and B. Ackermann, "Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet {DC} motors Part: {I}: Open-circuit field," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 29, no. 1, pp. 124–135, 1993. ISSN 0018-9464. 3.2, 3.6.1, 3.7.1, 3.7.2.
- [6] J. F. Gieras and M. Wing, "Permanent Magnet Motor Technology-Design and Applications," Second edn. Marcel Dekker, Inc., 2002. ISBN 0-8247-0739-7. 1.2.1, F.6.
- [7] E. S. Hamdi, "Design of Small Electrical Machines," Translator, A. Vahedi, S. Dahroyeh, Science and Industry University, Iran, 2006.
- [8] S. Mohammadi and M. Mirsalim, "Analytical Design Framework for Torque and Back-EMF Optimization and Inductance Calculation in Double-Rotor Radial-Flux Air-Cored Permanent-Magnet Synchronous Machines," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 50, no. 1, January 2014.
- [9] P. S. Bimbhra, "Electrical Machinery {Two Volume}," Translator, J. Soltani and H. Lesani, Qaem Publications Institution, 2011.
- [10] D. K. Cheng, "Field and Wave Electromagnetic," Addison-Wesley Reading, Mass, 1989. 3.3, 3.4, 3.5, 3.5, B, C.1, F.2.
- [11] N. Bianchi, "Electrical Machines Analysis Using Finite Element," Translator, D. Abbaszadeh and A. R. GhorbanI, Khajeh Nasireddin Tousi Industry University, Iran 2009.

## پیوست ۲

با توجه به توضیح شرایط مرزی در بخش ۶ مقاله می توان معادلات مربوط به نواحی مختلف را به صورت زیر بیان نمود:

$$C_m^I r_1^{mp} + D_m^I r_1^{-mp} = 0 \quad (\text{پ-۱})$$

$$C_m^I r_2^{mp} + D_m^I r_2^{-mp} - C_m^{II} r_2^{mp} - D_m^{II} r_2^{-mp} = G_m^{II} \quad (\text{پ-۲})$$

$$\mu^{II} C_m^I r_2^{mp-1} - \mu^{II} D_m^I r_2^{-mp-1} - \mu^I C_m^{II} r_2^{mp-1} + \mu^I D_m^{II} r_2^{-mp-1} = 0 \quad (\text{پ-۳})$$

$$C_m^{II} r_3^{mp} + D_m^{II} r_3^{-mp} - C_m^{III} r_3^{mp} - D_m^{III} r_3^{-mp} = -G_m^{II} \quad (\text{پ-۴})$$

$$\mu^{III} C_m^{II} r_3^{mp-1} - \mu^{III} D_m^{II} r_3^{-mp-1} - \mu^{II} C_m^{III} r_3^{mp-1} + \mu^{II} D_m^{III} r_3^{-mp-1} = 0 \quad (\text{پ-۵})$$

$$C_m^{III} r_4^{mp} + D_m^{III} r_4^{-mp} - C_m^{IV} r_4^{mp} - D_m^{IV} r_4^{-mp} = G_m^{IV} \quad (\text{پ-۶})$$

$$\mu^{IV} C_m^{III} r_4^{mp-1} - \mu^{IV} D_m^{III} r_4^{-mp-1} - \mu^{III} C_m^{IV} r_4^{mp-1} + \mu^{III} D_m^{IV} r_4^{-mp-1} = 0 \quad (\text{پ-۷})$$

$$C_m^{IV} r_5^{mp} + D_m^{IV} r_5^{-mp} - C_m^V r_5^{mp} - D_m^V r_5^{-mp} = -G_m^{IV} \quad (\text{پ-۸})$$

$$\mu^V C_m^{IV} r_5^{mp-1} - \mu^V D_m^{IV} r_5^{-mp-1} - \mu^{IV} C_m^V r_5^{mp-1} + \mu^{IV} D_m^V r_5^{-mp-1} = 0 \quad (\text{پ-۹})$$

$$C_m^V r_6^{mp} + D_m^V r_6^{-mp} = 0 \quad (\text{پ-۱۰})$$

بنابراین، مولفه های چگالی شار مغناطیسی بی باری در نواحی مختلف به صورت زیر به دست می آید:

$$B_{r|PM}(r, \phi) = -\frac{1}{r} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} mp(C_m r^{mp} + D_m r^{-mp}) \sin mp\phi_r \quad \text{برای نواحی } V \text{ و } III, J \quad (\text{پ-۱۱})$$

$$B_{r|PM}(r, \phi) = -\frac{1}{r} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} mp(C_m r^{mp} + D_m r^{-mp} + G_m) \sin mp\phi_r \quad \text{برای نواحی } IV \text{ و } II \quad (\text{پ-۱۲})$$

$$B_{\phi|PM}(r, \phi) = -\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} mp(C_m r^{mp-1} - D_m r^{-mp-1}) \cos mp\phi_r \quad \text{برای تمام نواحی} \quad (\text{پ-۱۳})$$

$$B_{mag|PM}(r, \phi) = \sqrt{B_{r|PM}^2(r, \phi) + B_{\phi|PM}^2(r, \phi)}, \quad (\text{پ-۱۴})$$

---

**Subdomain Analysis and Finite Element Design of No-load Magnetic Flux Density and Back-EMF in Radial Flux Air-cored Permanent Magnet Electrical Machine with Meddle Stator**

**B. Shirali, M. R. Alizadeh Pahlavani\***

**Malek-Ashtar University of Technology**

(Received: 27/01/2017, Accepted: 18/10/2017)

**Abstract**

*In this Article, no-load magnetic flux density and Back-EMF of the radial flux Air-Cored permanent magnet electrical machine (RFAMP) is provided with meddle stator using the subdomain analysis. First, Analytical relationships of no-load magnetic flux density and Back-EMF of this machine are presented with maxwell equations and, then, these relationships are validated by finite element numerical results in Maxwell 16.02 software. This comparison shows that the difference between analytical relations and finite element results is 3% about. In this article, to calculate the Back-EMF resulting from the permanent magnet, all the components of winding conductor density distribution are used. It should be noted that in the investigations relating to this case, only the first radial component of the magnetic flux density is used. It is also shown that magnet width coefficient plays an essential role in the non- sinusoidal of the no-load magnetic flux density in the stator nominal radius and reduction of the number of pairs of poles in the magnetic saturation of yokes and induced voltage reduction. It is also shown that increasing the length of the air gap can have the greatest role in zero harmonic distortion of Back-EMF.*

**Keywords:** Finite Element; Radial Density; Air-cored Permanent Magnet Machin

---

\* Corresponding author E-mail: [mr\\_alizadehp@mut.ac.ir](mailto:mr_alizadehp@mut.ac.ir)