

## مدل سازی تحلیلی ناهم محوری روتور در ماشین ورنیه آهن ربایی

کیوان شیبانی<sup>۱</sup>، صمد تقی پور بروجنی<sup>۲\*</sup>، غلامرضا عرب مارکده<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری، ۲- دانشیار، ۳- دانشیار، دانشگاه شهرکرد

(دریافت: ۹۸/۰۷/۰۵، پذیرش: ۹۸/۱۱/۱۴)

### چکیده

در این مقاله مولفه های چگالی شار ناشی از آهن رباهای روتور و جریان سیم پیچی آرمیچر در ماشین ورنیه آهن ربایی در شرایط ناهم محوری روتور به صورت تحلیلی محاسبه می شوند. در مدل استفاده شده، اثر دندانه های واقعی و مجازی استاتور ماشین ورنیه در نظر گرفته شده و جهت ساده سازی روند مدل سازی از نگاشت های هم نوا همچون شوارتز کریستوفل استفاده شده است. همچنین از حل معادله لاپلاس و روش جداسازی متغیرها جهت یافتن چگالی شار فاصله هوایی ناشی از آهن رباهای روتور و واکنش آرمیچر بهره برده شده است. در فرایند مدل سازی جهت کنار زدن محدودیت های استفاده از روش های بر پایه نگاشت های هم نوا، از مفهوم جریان مغناطیسی معادل برای آهن ربای روتور و سیم پیچی آرمیچر استفاده شده است. در واقع آهن رباهای روتور با یک جریان سطحی معادل روی روتور، و سیم پیچی آرمیچر با یک جریان سطحی در دهانه دندانه های واقعی استاتور ماشین ورنیه جایگزین می شوند. با توجه به این که در ماشین معادل به دست آمده رابطه حاکم از نوع رابطه لاپلاس است، هیچ گونه نگرانی از بابت استفاده از نگاشت های هم نوا وجود ندارد. پس از یافتن مولفه های چگالی شار فاصله هوایی ناشی از آهن رباهای روتور و جریان آرمیچر، گشتاور دندانه ای و گشتاور الکترومغناطیسی محاسبه می شوند. در نهایت نتایج به دست آمده توسط روش اجزا محدود تایید می گردند.

**کلیدواژه ها:** ماشین ورنیه آهن ربایی، ناهم محوری، نگاشت های هم نوا، جریان مغناطیسی معادل، واکنش آرمیچر

### ۱. مقدمه

البته روش اجزای محدود دارای محدودیت هایی همچون زمان محاسبه و حجم پردازش بالا است. یک مدل تحلیلی برای ماشین ورنیه آهن ربایی بر اساس مدار مغناطیسی معادل ماشین در [۱۰] پیشنهاد شده است. با این حال روش مدار مغناطیسی معادل ماشین ورنیه قادر به محاسبه دقیق توزیع چگالی شار فاصله هوایی نیست. در واقع دقت روش های مبتنی بر مدار مغناطیسی معادل وابسته به آگاهی از مسیرهای عبور شار در فاصله هوایی ماشین می باشد که این کار برای ماشین آهن ربایی سطحی که یک فاصله هوایی بزرگ موثر دارد بسیار دشوار است.

برای محاسبه توزیع دقیق مولفه های چگالی شار در فاصله هوایی در [۱۱-۱۳] روش زیر دامنه برای ماشین ورنیه ارائه شده است. با این که مدل زیر دامنه روش دقیقی است اما دارای فرمول بندی پیچیده ای است. علاوه بر آن، در روش زیر دامنه برای یافتن مولفه های میدان عملیات معکوس سازی ماتریس برای هر موقعیت زاویه ای روتور نیاز است. به عنوان مدل های ساده، در [۱۴-۱۶] تابع سیم پیچی ماشین بر اساس مدل تک بعدی نفوذ پذیری فاصله هوایی به دست آمده است. در مقایسه با مدل نفوذ پذیری تک بعدی، مدل نفوذ پذیری مختلط دارای نتایج دقیق تری است [۱۷-۱۸]. در محاسبه چگالی شار فاصله هوایی

ماشین ورنیه آهن ربایی یک ماشین با گشتاور بالا و سرعت پایین می باشد که دارای ساختار ساده تر و حجم کوچک تر نسبت به ماشین های هم توان خود است. همین امر باعث ایجاد جذابیت این ماشین برای کاربردهای با اتصال مستقیم<sup>۲</sup> در کاربردهایی مانند توربین های بادی و وسایل نقلیه الکتریکی گردیده است [۳]. اساس کار ماشین های ورنیه درگیر شدن مولفه های هارمونیک چگالی شار فاصله هوایی آرمیچر با مولفه اصلی چگالی شار آهن ربا است. این پدیده به عنوان اثر چرخ دنده مغناطیسی<sup>۳</sup> شناخته می شود [۴-۵]. به دلیل ویژگی های جالب این ماشین ها، مطالعه و بررسی آنها با ارایه و توسعه مدل های ریاضی در دست انجام است. دو مدل ساده در [۶-۷] برای تحلیل ماشین ورنیه آهن ربایی آورده شده که اصول قوانین کارکرد ماشین ورنیه را توصیف می کند. با این حال این مدل ها برای محاسبه چگالی شار فاصله هوایی دقت مناسبی ندارند. در [۸-۹] توزیع دقیق چگالی شار فاصله هوایی توسط روش اجزای محدود به دست آمده است.

\* نویسنده پاسخگو: s.taghipour@sku.ac.ir

<sup>2</sup> Direct-Drive applications

<sup>3</sup> Magnetic Gearing Effect

محورهای استاتور و روتور است. رایج‌ترین نوع ناهم‌محوری از نوع ایستا است و در این مقاله این نوع ناهم‌محوری در نظر گرفته می‌شود. مرسوم‌ترین روش مدل‌سازی ناهم‌محوری روتور در ماشین‌های آهن‌ربایی، روش تحلیل اغتشاش<sup>۲</sup> می‌باشد [۲۲]. مشکل روش تحلیل اغتشاش چشم‌پوشی از مشتق‌های مراتب بالا در رابطه‌ی پواسون است که این موضوع در ماشین ورنیه که دارای محتوای بالایی از هارمونیک‌های فضایی چگالی شار است خطای بیشتری را در پیش‌بینی نتایج ایجاد می‌نماید. در [۲۳] از نگاشت‌های هم‌نوا نیز در مدل‌سازی ناهم‌محوری استفاده شده است ولی در این مراجع از اثر شیارهای استاتور چشم‌پوشی شده است. بنابراین، استفاده از مدل [۲۳] برای تحلیل ماشین ورنیه که در آن، شیارهای استاتور نقش بسیار مهمی دارند مناسب نمی‌باشد. در [۲۱] پدیده ناهم‌محوری با لحاظ شیارهای استاتور و با استفاده از نگاشت‌های هم‌نوا مدل شده است. البته در [۲۱] اثر واکنش آرمیچر لحاظ نشده است.

در این مقاله یک مدل تحلیلی مناسب و دقیق برای ماشین ورنیه با لحاظ پدیده ناهم‌محوری روتور ارائه شده است. این مدل قادر به پیش‌بینی و محاسبه مولفه‌های چگالی شار فاصله‌هوایی در شرایط بارداری و بی‌باری ماشین ورنیه آهن‌ربایی با روتور ناهم‌محور است. در ابتدا با استفاده از قضیه یکتایی و مفهوم جریان‌های مغناطیسی معادل [۲۴-۲۶]، آهن‌رباهای روتور و جریان‌های استاتور با جریان معادل به ترتیب بر روی روتور و دهانه باز شیارهای استاتور مدل می‌شوند. سپس ماشین معادل به‌دست آمده با استفاده از یک زنجیره نگاشت هم‌نوا از جمله نگاشت شوارتز کریستوفل به یک ماشین با روتور هم‌مرکز و استاتور بدون شیار تبدیل می‌گردد. در این شرایط معادله حاکم بر مساله از نوع لاپلاس خواهند شد و استفاده از نگاشت‌ها بدون نگرانی و مشکل می‌باشد. در نهایت مولفه‌های چگالی شار ناشی از جریان‌های سطحی معادل آهن‌ربا و جریان‌های سطحی معادل جریان آرمیچر توسط روش جداسازی متغیرها و حل معادله لاپلاس به‌دست می‌آیند. به دنبال آن گشتاور الکترومغناطیسی و دندانه‌ای محاسبه می‌شوند. در نهایت برای تایید مدل پیشنهادی نتایج آن با روش اجزا محدود مقایسه و تایید می‌گردند.

## ۲. مدل‌سازی ماشین ورنیه با روتور ناهم‌محور

اساس کارکرد ماشین ورنیه در [۶] آورده شده است و برای صرفه جویی در نوشتار از بازگویی آن خودداری می‌شود. در روند مدل‌سازی ماشین ورنیه آهن‌ربایی فرضیه‌های زیر لحاظ شده‌اند:

۱- از اثر اشباع مغناطیسی چشم‌پوشی شده است.

به روش تابع نفوذپذیری مختلط فاصله‌هوایی، چند نگاشت هم‌نوا استفاده شده است. بر خلاف روش زیر دامنه، روش‌های مبتنی بر نگاشت‌های هم‌نوا، فرمول‌بندی پیچیده و محاسبه ماتریس معکوس را در محاسبات خود شامل نمی‌شوند. حتی در نرم‌افزار متلب یک جعبه ابزار برای کاربرد نگاشت شوارتز-کریستوفل در تحلیل ماشین‌های الکتریکی وجود دارد [۱۹]. از طرف دیگر با توجه به نقطه نظر ریاضی موضوع، نگاشت‌ها فقط می‌توانند به مسائل بر پایه معادلات لاپلاس اعمال شوند [۲۰]. به عبارت دیگر نگاشت‌ها قادر به اعمال در مسائلی با معادلات پواسون نیستند.

اگرچه محاسبات روش نفوذپذیری مختلط فاصله‌هوایی در [۱۷] ساده است اما نتایج به‌دست‌آمده دقت کافی را ندارند. علت این است که در این روش اثرات متقابل شیارهای استاتور و تغییر شکل آهن‌ربا هنگام استفاده از نگاشت‌ها در نظر گرفته نشده است. در [۱۸] مشکل اثرات متقابل شیارهای استاتور با استفاده از نگاشت شوارتز کریستوفل برطرف گردیده است. با این حال، نگاشت‌ها باز هم روی معادلات پواسون اعمال می‌شوند. به همین دلایل نتایج محاسبه مولفه‌های میدان فاصله‌هوایی در [۱۷-۱۸] به دقت روش اجزا محدود نیست.

یک مدل تحلیلی دیگر بر پایه نگاشت‌ها در [۲۱] معرفی شده است که در این مدل مشکل تغییر شکل آهن‌ربا و استفاده از نگاشت برای معادلات پواسون حل شده است در حالی که این مدل تحلیل حالت بی‌باری ماشین را انجام داده و واکنش آرمیچر و گشتاور الکترومغناطیسی در این مرجع آورده نشده است. همچنین در تمامی مدل‌های ارائه شده در [۶-۲۱] شرایط ناهم‌محوری روتور لحاظ نشده است. برخلاف ماشین‌های آهن‌ربایی معمولی، محتوای هارمونیک‌های فضایی چگالی شار در ماشین ورنیه به دلیل استفاده از قطب‌های مدوله‌کننده<sup>۱</sup> بسیار بالا است. حتی در ماشین‌های آهن‌ربایی معمولی که دارای محتوای هارمونیک‌های فضایی کمی هستند، ناهم‌محوری روتور سبب اعوجاج هارمونیک می‌شود. بنابراین مدل‌سازی و مطالعه پدیده ناهم‌محوری روتور در ماشین‌های ورنیه از اهمیت بالاتری برخوردار است.

پدیده ناهم‌محوری یک پدیده رایج در ماشین‌های الکتریکی است که به دلیل آسیب دیدن بیرینگ‌ها و همچنین عدم دقت در ساخت ماشین ایجاد می‌شود. در این شرایط مکان محورهای روتور و استاتور متفاوت است. ناهم‌محوری روتور دارای انواع ایستا، پویا و ترکیبی می‌باشد. در نوع ناهم‌محوری ایستا روتور حول مرکز خود که به موازات محور استاتور است می‌چرخد. در نوع ناهم‌محوری پویا روتور حول محور استاتور می‌چرخد و در نوع ترکیبی آن روتور دارای دو حرکت چرخشی هم‌زمان به دور

<sup>۲</sup>Perturbation Method

<sup>۱</sup>Modulating Poles

به صورتی که به یک ماشین ورنیه معادل با استاتور بدون شیار و روتور هم محور برسیم. جهت رسیدن به این منظور از نگاشت های هم نوا کمک می گیریم. صفحه اصلی که ماشین ورنیه با روتور ناهم محور در آن قرار دارد را  $S$  می نامیم.

در ابتدا با استفاده از نگاشت اول، به یک ماشین ورنیه شیاردار با روتور هم مرکز در صفحه  $T$  می رسمیم. معادله (۱) این نگاشت را توصیف می کند.

$$t(s) = \frac{s + fR_s}{fs + R_s}, \quad s(t) = \frac{-R_s w + cR_s}{cw - 1} \quad (1)$$

$$f = \frac{-U + \sqrt{U^2 - 4}}{2}, \quad U = \frac{-R_r^2 + d^2 + R_s^2}{dR_s}$$

در این نگاشت،  $d$  فاصله محورهای روتور و استاتور در ماشین ورنیه ناهم محور می باشد. بعد از اعمال این نگاشت ماشین ورنیه هم مرکز خواهد شد. در شکل (۲-ب) فاصله هوایی ماشین را بعد از اعمال نگاشت آورده شده که تغییر شکل شیارهای استاتور در آن مشاهده می شود. نگاشت بعدی از نوع نگاشت لگاریتمی است و جهت ساده سازی ماشین به ماشین بدون شیار استفاده می شود. با انجام این نگاشت لگاریتمی که در (۲) آورده شده است، هندسه ماشین به صورت شکل (۲-پ) به دست خواهد آمد.

$$w(t) = \log(t) \quad (2)$$

$t(w) = e^w$

برای حذف دندانه ها از نگاشت شوارتز کریستوفل<sup>۱</sup> (۳) استفاده شده است.

$$Z(w) = A \int \prod_{k=1}^{n-1} (w - w_k)^{\frac{\alpha_k - 1}{\pi}} dw + C \quad (3)$$

که در آن،  $A$  و  $C$  ضرایب نگاشت شوارتز کریستوفل بوده و  $n$  تعداد گوشه ها (شکستگی ها) در هندسه ماشین واقع در صفحه  $W$  است و  $w_k$ ،  $\alpha_k$  زاویه های  $k$  امین گوشه در صفحه  $W$  می باشند. نگاشت شوارتز-کریستوفل چند ضلعی مورد نظر در صفحه  $W$  را بر روی محور افقی در صفحه  $Z$  نگاشت می کند [۱۹]. برای یافتن ضرایب  $A$  و  $C$  نیاز به حل یک معادله غیرخطی است که توسط یکی از کتابخانه های نرم افزار متلب که مخصوص نگاشت شوارتز کریستوفل است انجام خواهد شد [۲۳]. لازم به ذکر است این ضرایب می بایست تنها یک بار و برای یک موقعیت روتور محاسبه شوند. هندسه جدید ماشین بعد از اعمال این نگاشت در صفحه  $Z$  به دست آمده و در شکل (۲-ت) نشان داده

۲- نفوذپذیری آهن ربا،  $\mu_r=1$  در نظر گرفته شده است.

۳- اثر انتهایی در نظر گرفته نشده است.

۴- استاتور شیاردار در نظر گرفته شده اند.

۵- از جعبه ابزار مهیا شده متلب جهت یافتن ضرایب تبدیل شوارتز کریستوفل استفاده شده است.

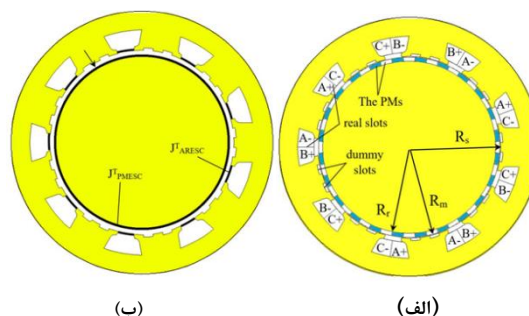
۶- ناهم محوری ماشین از نوع استاتیکی است.

۷- از جریان های سطحی معادل برای معادل سازی آهن ربا و جریان های استاتور استفاده شده است.

۸- عمق شیارهای مجازی و واقعی در فرایند مدل سازی یکسان در نظر گرفته می شوند.

۹- اعمال تبدیل های هم نوا بر روی استاتور تنها پهنای دندانه ها را تغییر داده و شکل دیواره های آنها همواره شعاعی می ماند.

در شکل (۱-آ) ماشین ورنیه واقعی و در شکل (۱-ب) ماشین ورنیه با جریان های سطحی معادل آهن ربا  $J_{PMECS}$  و جریان سطحی معادل آرمیچر  $J_{ARECS}$  آورده شده است. چگونگی محاسبه توزیع این جریان های معادل با استفاده از قضیه یکتایی انجام شده و در بخش بعدی ارایه می شود.



شکل (۱): (الف) ماشین ورنیه واقعی، (ب) ماشین ورنیه معادل با جریان های سطحی.

## ۲-۱. معرفی نگاشت ها

در این قسمت هندسه پیچیده ماشین ورنیه با روتور ناهم محور با استفاده از نگاشت های هم نوا به یک هندسه ساده تبدیل می شود. لازم به ذکر است که تمامی نگاشت ها بر روی فاصله هوایی ماشین و مرزهای آن (سطح داخلی استاتور و شیارهای آن و سطح بیرونی روتور) اعمال می شوند. هندسه مورد نظر برای ماشین ورنیه ناهم محور جهت تحلیل در شکل (۲-آ) نشان داده شده است که در آن، شعاع استاتور،  $R_r$  شعاع روتور،  $R_m$  شعاع آهن ربا است. در شکل (۱) استاتور دارای شیارهای واقعی و مجازی بوده و روتور با استاتور ناهم محور استاتیکی می باشد. قدم اول در تحلیل این ماشین رسیدن به یک هندسه ساده تر است

<sup>1</sup> Schwarz-Christoffel

مختصات فرضی در صفحه‌های  $Z$  و  $W$  می‌باشند.

بنابراین، جریان‌های سطحی معادل آهن‌ریا و آرمیچر را باید به‌عنوان یک شرط مرزی در ساختار ماشین انتقال داد. با انتقال این جریان‌ها به صفحه انتهایی  $K$ ، قادر خواهیم بود معادلات لاپلاس را با شرایط مرزی به‌دست‌آمده برای یافتن مولفه‌های چگالی شار فاصله هوایی حل کنیم. با توجه به رابطه (۵) جریان‌های معادل آهن‌ریا و آرمیچر توسط (۶) به صفحه انتهایی انتقال داده می‌شوند که در آن، نماد \* بیانگر عملگر مزدوج مختلط<sup>۱</sup> است.

$$J_{PMESC}^K = J_{PMESC}^S \left( \frac{ds}{dt} \right)^* \left( \frac{dt}{dw} \right)^* \left( \frac{dw}{dz} \right)^* \left( \frac{dz}{dk} \right)^* \quad (6)$$

$$J_{ARECS}^K = J_{ARECS}^S \left( \frac{ds}{dt} \right)^* \left( \frac{dt}{dw} \right)^* \left( \frac{dw}{dz} \right)^* \left( \frac{dz}{dk} \right)^*$$

در بخش‌های بعدی این مقاله چگونگی یافتن این جریان‌های سطحی معادل آرمیچر توضیح داده خواهند شد.

### ۲-۳. چگالی شار فاصله هوایی

با انتقال جریان‌های سطحی معادل آهن‌ریا و جریان آرمیچر به صفحه  $K$  و حل معادلات لاپلاس قادر به یافتن مولفه‌های چگالی شار ناشی از روتور و واکنش آرمیچر هستیم. در صفحه  $K$  فاصله هوایی ماشین تنها یک ناحیه در  $(R_r^k < \rho < R_s^k)$  را در برمی‌گیرد که معادله حاکم بر آن رابطه لاپلاس است. در ابتدا میدان ناشی از جریان سطحی روتور را پیدا می‌کنیم. در رابطه (۷) معادله لاپلاس حاکم و شرایط مرزی انتقال یافته به صفحه  $K$  نشان داده شده است.

$$\nabla^2 A_{PMESC}^k = 0$$

$$\frac{\partial A_{PMESC}^k}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_r^k} = \mu_0 J_{PMESC}^k \quad (7)$$

$$\frac{\partial A_{PMESC}^k}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_s^k} = 0$$

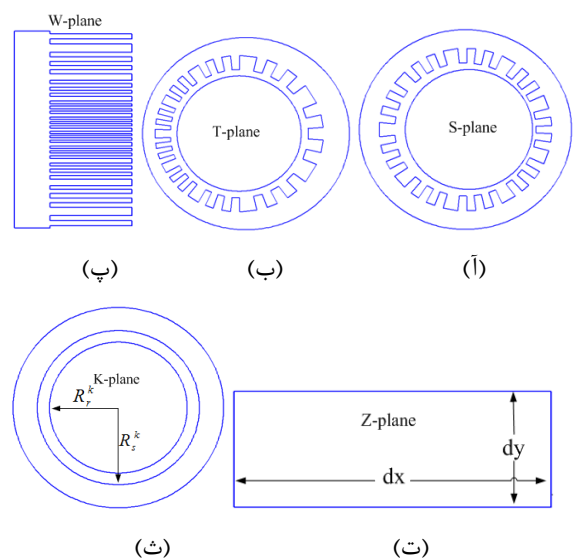
که در آن،  $\rho, \nu$  به ترتیب مولفه‌های مماسی و شعاعی میدان و  $R_r^k, R_s^k$  به ترتیب شعاع استاتور و روتور در صفحه  $K$  یا همان ماشین هم مرکز و بدون شیار، می‌باشند. با حل معادله لاپلاس به روش جداسازی متغیرها، مولفه‌های شعاعی و مماسی میدان ناشی از جریان‌های سطحی معادل آهن‌ریا در سطح روتور در صفحه  $K$  به‌صورت رابطه (۸) به‌دست می‌آیند.

شده است. در نهایت برای رسیدن به فاصله هوایی هم مرکز و بدون شیار، آخرین نگاهت که در رابطه (۴) آورده شده، استفاده خواهد شد.

$$K(z) = e^{\frac{2\pi}{dx} \left( z + \frac{dy}{2} \right) - \frac{\pi}{j}}$$

$$Z(k) = \frac{dx}{2j} \left( -1 + j \frac{\ln(k)}{\pi} \right) + \frac{dy}{2} \quad (4)$$

که  $dx$  و  $dy$  در شکل (۲-ت) مشخص شده است. در این صفحه که  $K$  نامیده شده است، یک ماشین هم مرکز بدون شیار داریم که در شکل (۲-ث) نمایش داده شده است.



شکل (۲): (آ) ماشین ورنیه واقعی در صفحه  $S$ ، و هندسه ماشین بعد از اعمال نگاهت‌ها در صفحه‌های (ب)  $T$ ، (پ)  $W$ ، (ت)  $Z$  و (ث)  $K$ .

### ۲-۲. انتقال شرایط مرزی حاکم بر مساله

همان‌گونه که هنگام استفاده از نگاهت‌های هم‌نوا ساختار هندسی ماشین انتقال و تغییر پیدا می‌کند، شرایط مرزی نیز می‌بایست از صفحه ابتدایی  $S$  به صفحه انتهایی  $K$  انتقال پیدا کند. برای شرایط مرزی دیریکله، مقدار تابع پتانسیل مغناطیسی در هر نقطه از مرزها با اعمال نگاهت‌ها دستخوش تغییر نمی‌شود. اما در حالتی که ما شرایط مرزی نویمن را داشته باشیم مقادیر تابع پتانسیل مغناطیسی،  $A$ ، با توجه به معادله (۵) به‌دست می‌آیند [۲۳].

$$\left( \frac{\partial A^w}{\partial u} + j \frac{\partial A^w}{\partial v} \right) = \left( \frac{\partial A^z}{\partial x} + j \frac{\partial A^z}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial v} + j \frac{\partial x}{\partial u} \right) \quad (5)$$

که در آن،  $(x, y)$  و  $(u, v)$  به ترتیب مربوط به متغیرهای

<sup>1</sup>Complex Conjugation

هندسه ماشین ورنیه ناهم محور با استاتور شیاردار قرار دارد منتقل نمود. در رابطه (۱۳) چگونگی انتقال مولفه های چگالی شار فاصله هوایی از صفحه  $K$  به صفحه  $S$  آورده شده است.

$$B^S = \frac{B^K}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^* \left(\frac{dt}{dw}\right)^* \left(\frac{dw}{dz}\right)^* \left(\frac{dz}{dk}\right)^*} \quad (13)$$

### ۲-۵. گشتاور دندانه و گشتاور الکترومغناطیسی

با داشتن مولفه های چگالی شار ناشی از آهنرباهای روتور و واکنش آرمیچر، با استفاده از از معادلات تنش ماکسول گشتاور دندانه و گشتاور الکترومغناطیسی به ترتیب از روابط (۱۴) و (۱۵) به دست خواهند آمد.

$$T_{cogg} = \frac{r^2 L_{stk}}{\mu_0} \int_0^{2\pi} B_{rPM} B_{\phi PM}^r d\phi_r \quad (14)$$

$$T_e = \frac{r^2 L_{stk}}{\mu_0} \int_0^{2\pi} B_{rg} B_{\phi g} d\phi \quad (15)$$

که در آن،  $r$  شعاع استوانه ای در نظر گرفته شده در فاصله هوایی،  $L_{stk}$  طول محوری ماشین و  $B_{rPM}$ ،  $B_{\phi PM}$  مولفه های مماسی و شعاعی چگالی شار فاصله هوایی ناشی از آهنربای روتور و  $B_{rg}$ ،  $B_{\phi g}$  مولفه های مماسی و شعاعی چگالی شار فاصله هوایی ناشی از روتور و عکس العمل آرمیچر و  $\phi$  متغیر انتگرال گیری و موقعیت زاویه ای المان انتگرال گیری در فاصله هوایی در دستگاه استاتور است.

### ۳-۵. نیروی نامتعادل شعاعی

در اثر ناهم محوری رتور یک نیروی کششی نامتعادل به رتور وارد می شود که توسط رابطه ماتریس تنش ماکسول به دست خواهد آمد. با داشتن مولفه های چگالی شار برآیند آهنرباهای روتور و واکنش آرمیچر، مولفه های  $X$  و  $Y$  نیرو به ترتیب از روابط (۱۶) و (۱۷) به دست خواهند آمد.

$$F_x = \frac{rL_{stk}}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} \left( \begin{bmatrix} B_{rg}^2 - B_{\phi g}^2 & -2B_{\phi g}^g B_r^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} \right) d\phi \quad (16)$$

$$F_y = \frac{rL_{stk}}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} \left( \begin{bmatrix} B_{rg}^2 - B_{\phi g}^2 & 2B_{\phi g}^g B_r^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{bmatrix} \right) d\phi \quad (17)$$

$$B_{\rho}^K = \sum_n \tau_n (J_{PMECSn}^K \sin(nv) - J_{PMECSn}^K \cos(nv))$$

$$B_v^K = \sum_n -\tau_n (J_{PMECSn}^K \sin(nv) + J_{PMECSn}^K \cos(nv)) \quad (8)$$

$$\tau_n = \mu_0 \frac{\rho_s^{n-1} + \rho_r^{2n} \rho_s^{-n-1}}{\rho_r^{n-1} - \rho_s^{2n} \rho_r^{-n-1}}$$

که در آن،  $J_{PMECSn}^K$  و  $J_{PMECSn}^K$  ضرایب سری فوریه به ترتیب کسینوسی و سینوسی مربوط به جریان های سطحی معادل آهنربا در صفحه  $K$  است.

پس از یافتن میدان ناشی از جریان سطحی رتور، نوبت به یافتن مولفه های میدان ناشی از سیم پیچی آرمیچر است. در (۹) معادلات ماشین و شرایط مرزی انتقالی که ناشی از جریان سطحی معادل عکس العمل آرمیچر در صفحه  $K$  نشان داده شده است.

$$\nabla^2 A_{ARESC}^K = 0$$

$$\frac{\partial A_{ARESC}^k}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_s^k} = -\mu_0 J_{ARESC}^k \quad (9)$$

$$\frac{\partial A_{ARESC}^k}{\partial v} \Big|_{\rho=R_r^k} = 0$$

با حل معادله لاپلاس (۹) به روش جداسازی متغیرها، میدان ناشی از واکنش آرمیچر در نقشه انتهایی  $K$  به دست می آید که در رابطه (۱۰) و رابطه (۱۱) مولفه های شعاعی و مماسی آن نشان داده شده اند.

$$B_{ARESC\rho}^K = \sum_n \xi_n (J_{ARECSn}^K \sin(nv) - J_{ARECSn}^K \cos(nv)) \quad (10)$$

$$B_{ARESCv}^K = \sum_n \xi_n (J_{ARECSn}^K \sin(nv) + J_{ARECSn}^K \cos(nv)) \quad (11)$$

که در آن،  $J_{ARECSn}^K$  و  $J_{ARECSn}^K$  ضرایب سری فوریه به ترتیب کسینوسی و سینوسی مربوط به جریان های سطحی معادل آرمیچر در صفحه  $K$  است و  $\xi_n$  به صورت رابطه (۱۲) است.

$$\xi_n = \mu_0 \frac{\rho_s^{n-1} + \rho_r^{2n} \rho_s^{-n-1}}{\rho_s^{n-1} - \rho_r^{2n} \rho_s^{-n-1}} \quad (12)$$

### ۲-۴. بازگرداندن میدان به نقشه اولیه ماشین ورنیه

بعد از یافتن مولفه های چگالی شار ناشی از آهنربا و واکنش آرمیچر در صفحه  $K$ ، باید آنها را به صفحه ابتدایی  $S$  جایی که

### ۳-۶. شار، اندوکتانس و ولتاژ Back-EMF

واقعی استاتور قرار می‌گیرند. برای محاسبه آنها کل آمپردور قرار گرفته در یک شیار به صورت یک جریان سطحی در دهانه شیار در نظر گرفته می‌شود. در رابطه (۲۲) چگونگی در نظر گرفتن جریان سطحی برای سیم‌پیچی آرمیچر آمده است.

$$J_{ARESC}^N(\varphi) = \sum_{i=1}^{Q_s} \frac{AT_i}{b_0} \delta(i, \varphi) \quad (22)$$

که در آن،  $AT_i$  آمپردور  $i$ امین شیار استاتور،  $b_0$  زاویه دهانه باز شیارهای واقعی استاتور و  $\delta$  تابع پالس واحد که در (۲۳) آمده و مقدار آن در دهانه باز شیار واقعی استاتور واحد و در بقیه جاها برابر صفر است. لازم به ذکر است  $Q_s$  تعداد شیارهای واقعی استاتور است.

$$\delta(i, \varphi) = \begin{cases} 1 & i \frac{2\pi}{Q_s} - \frac{b_0}{2} < \varphi < i \frac{2\pi}{Q_s} + \frac{b_0}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (23)$$

لازم به ذکر است که پهنای این جریان‌های معادل در شیارها تنها در دستگاه ماشین واقعی برابر بوده و پس از اعمال نگاهت‌های هم‌نوا پهنای این جریان‌ها در دستگاه دیگر با یکدیگر متفاوت خواهد بود. پس از یافتن جریان معادل در دهانه باز شیارهای استاتور و انتقال آنها توسط نگاهت‌ها، بازنویسی آنها به شکل سری فوریه در صفحه  $K$  ضروری می‌باشد.

### ۳-۲. جریان‌های سطحی روی سطح روتور

آهن‌رباهای روتور با یک جریان سطحی بر روی روتور به گونه‌ای جایگزین می‌شوند که هر دو چگالی شار یکسانی در فاصله هوایی ماشین ایجاد نمایند. طبق قضیه یکتایی این پاسخ یکسان بوده و مستقل از هندسه در نظر گرفته شده برای استاتور (مانند شیاردار بودن یا بدون شیار بودن آن، و یا هم‌محور و یا ناهم‌محور بودن آن) است. البته هندسه استاتور در نظر گرفته شده در هر دو ساختار (با آهن‌ریا و با جریان‌های سطحی روتور) باید یکسان باشد. بنابراین، با یافتن چگالی شار فاصله هوایی در یک ساختار ساده (ماشین بدون شیار و با روتور هم‌محور با استاتور) و یکسان قرار دادن روابط چگالی شار می‌توان چگالی جریان‌های سطحی معادل را که به فرم سری فوریه است را به صورت (۲۴) به دست آورد.

$$J_{PMECS}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} J_{PMECSn} \cos(np\theta) + J_{PMECSsn} \sin(np\theta) \quad (24)$$

$$J_{PMECSn} = -\sigma_n \sin \theta_r$$

$$J_{PMECSsn} = \sigma_n \cos \theta_r$$

$$\sigma_n = \frac{a_n}{\mu_0} (R_r^{np-1} - R_s^{2np} R_r^{np-1}) (R_m^{np-1} - R_s^{2np} R_m^{-np-1})$$

با دانستن مولفه‌های شعاعی چگالی شار آهن‌رباهای روتور و واکنش آرمیچر، شار در برگیرنده کلاف‌های آرمیچر به صورت رابطه (۱۸) به دست خواهد آمد، که در آن،  $N$  تعداد دور یک کلاف،  $C_s$  تعداد کلاف‌های یک فاز،  $v_{l1}$  و  $v_{l2}$  به ترتیب موقعیت زاویه‌ای بازوهای رفت و برگشت کلاف  $i$ ام،  $\theta_r$  موقعیت زاویه‌ای رتور،  $R_s$  شعاع داخلی استاتور و طول پشته ماشین است.  $B_r$  مولفه شعاعی چگالی شار آهن‌ریا و یا آرمیچر است که با جایگذاری آنها به ترتیب شار آهن‌ریا ( $\lambda_{PM}$ ) و یا شار سیم پیچ را ( $\lambda_{AR}$ ) به دست خواهد آمد. با دانستن توابع شار مقادیر اندوکتانس خودی فاز  $x$  و اندوکتانس متقابل فاز  $x$  با فاز  $y$  به ترتیب توسط روابط (۱۹) و (۲۰) و ولتاژ Back-EMF القا شده در فاز  $x$  با رابطه (۲۱) به دست خواهند آمد. در روابط (۱۹) و (۲۰) شار فاصله هوایی تنها ناشی از فاز  $x$  آرمیچر، و در رابطه (۲۱) شار فاصله هوایی تنها ناشی از آهن‌ریای رتور است. لازم به یادآوری است که از آنجایی که مولفه‌های چگالی شار در فاصله هوایی به صورت دقیق پیش‌بینی شده‌اند، خودبه‌خود شار ناشی اثر خود را در رابطه (۱۸) مربوط به شار پیوندی کلاف گذاشته و در نتیجه نهایی نمایان خواهد شد.

$$\lambda(\theta_r) = \quad (18)$$

$$NR_s L_{stk} \sum_{i=1}^{Q_s} \int_{v_{l1}}^{v_{l2}} B_r(\theta_r, \varphi) d\varphi$$

$$L_{xx}(\theta_r) = \frac{\lambda_x(\theta_r)}{i_x} \quad (19)$$

$$L_{xy}(\theta_r) = \frac{\lambda_y(\theta_r)}{i_x} \quad (20)$$

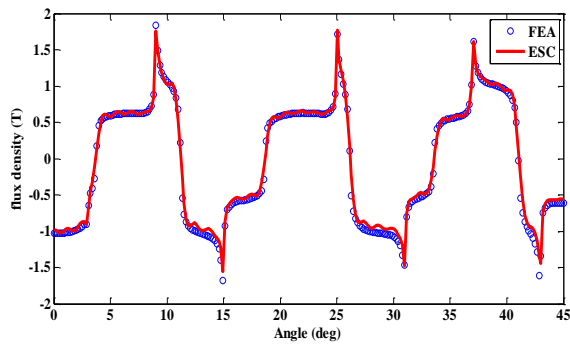
$$emf = \frac{d\lambda_{PMx}}{dt} = \omega \frac{d\lambda_{PMx}(\theta_r)}{d\theta_r} \quad (21)$$

### ۳. جریان‌های سطحی معادل آرمیچر و آهن‌رباها

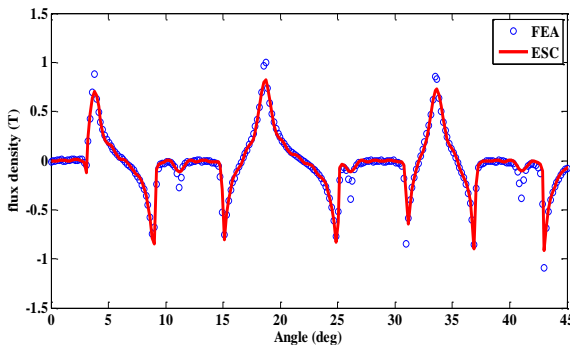
منظور از جریان‌های سطحی معادل آرمیچر و یا آهن‌ریا جریان‌هایی است که به صورت فرضی به ترتیب در دهانه باز شیار و یا روی سطح روتور قرار می‌گیرند و اثر آنها در تولید چگالی شار فاصله هوایی همانند جریان آرمیچر درون شیار و یا آهن‌ریای موجود بر روی سطح روتور است. به منظور یافتن این جریان‌های معادل از قوانین تئوری الکترومغناطیس استفاده می‌شود.

### ۳-۱. جریان‌های سطحی دهانه باز شیارها

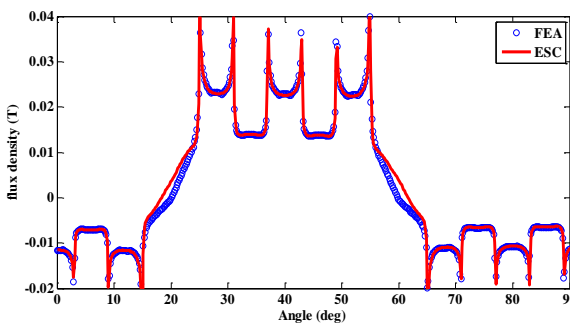
جریان سطحی معادل سیم‌پیچی آرمیچر در دهانه باز شیارهای



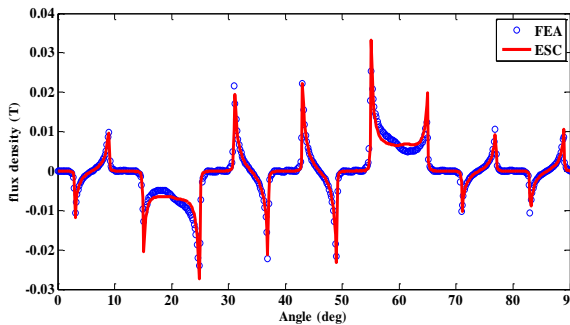
شکل (۴): مولفه شعاعی چگالی شار فاصله هوایی ناشی از آهنربا.



شکل (۵): مولفه مماسی چگالی شار فاصله هوایی ناشی از آهنربا.



شکل (۶): چگالی شار شعاعی فاصله هوایی ناشی از واکنش آرمیچر.



شکل (۷): چگالی شار مماسی فاصله هوایی ناشی از واکنش آرمیچر.

چگالی شار فاصله هوایی ناشی از واکنش آرمیچر، به ازای جریانهای  $(I_a=1A, I_b=I_c=-0.5A)$  نیز با مدل تحلیلی و روش اجزای محدود به دست آمده و در شکل های (۶-۷) با یکدیگر مقایسه شده اند.

که در آن،  $p$  تعداد زوج قطبها،  $\theta_r$  موقعیت زاویه ای روتور و  $\mu_0$  ضریب نفوذپذیری خلا می باشند و  $a_n$  در رابطه (۲۵) آورده شده است.

$$a_n = \eta_n k_n + \frac{\mu_0 M_{\phi n}}{2np} (2R_r^{np+1} - R_m^{-np+1} R_r^{2np} - R_m^{np+1})$$

$$k_n = \begin{cases} -\mu_0 \frac{M_{r1} + M_{\phi 1}}{2} \ln r & np = 1 \\ \mu_0 \frac{M_{\phi n} + np M_m}{(np)^2 - 1} & np \neq 1 \end{cases} \quad (25)$$

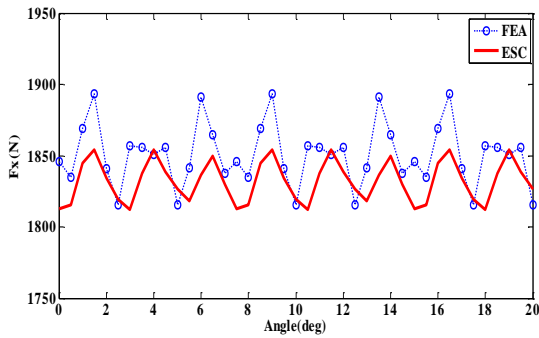
$$\eta_n = \frac{R_r^{np+1}}{np} + \left[ \frac{np-1}{2np} - 1 \right] R_r^{2np} R_m^{-np+1} + \frac{np-1}{2np} R_m^{np+1}$$

#### ۴. تایید مدل

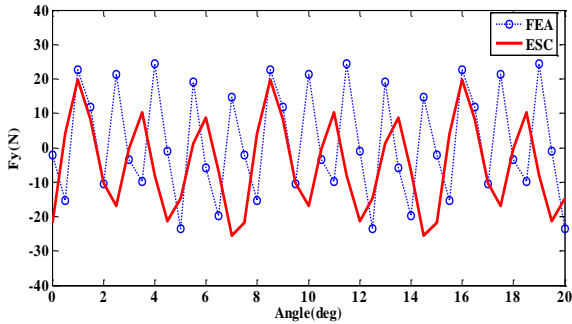
برای تایید مدل پیشنهادی در این مقاله، نتایج به دست آمده از مدل را با نتایج به دست آمده از روش اجزای محدود مقایسه می کنیم. اطلاعات ماشین ورنیه در نظر گرفته شده در جدول (۱) آورده شده است. همچنین الگوی سیم پیچی و موقعیت صفر روتور در شکل (۱-آ) نشان داده شده است. اتصال کلاف های آرمیچر در هر فاز به صورت سری است. هر دو حالت بی باری و تحت بار ماشین ورنیه با روتور ناهم محور بررسی شده است. مولفه های شعاعی و مماسی چگالی شار فاصله هوایی ناشی از آهنربا در موقعیت زاویه ای صفر روتور و ناهم محوری  $d=0.5mm$  در شکل های (۴) و (۵) نشان داده شده اند.

جدول (۱): پارامترهای ماشین ورنیه مورد مطالعه

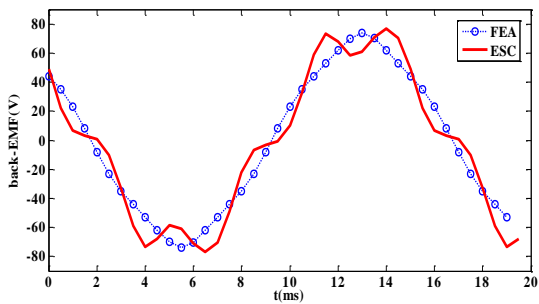
مقدار	نماد	پارامترهای ماشین
۲۴/۳	$p/q$	زوج قطب استاتور/روتور
۹	$Q_s$	تعداد شیارها حقیقی
۲۷	FMP	تعداد شیارها مجازی
۶	$c_0$ (deg)	دهانه باز شیارهای مجازی
۱۰	$b_0$ (deg)	دهانه باز شیارهای واقعی
۱۰۰	$L_{stk}$ (mm)	طول پشته ماشین
۱۱۲,۲	$R_s$ (mm)	شعاع استاتور
۰,۸	$g$ (mm)	طول فاصله هوایی
۱۰۶,۴	$R_r$ (mm)	شعاع روتور
۷,۵	$\alpha_p$ (deg)	زاویه کمان آهنربا
۱,۱	$B_{rem}$ (T)	پسماند آهنربا
۵۸	$I_{phase}$	جریان نامی
۱۰۰	$N$	تعداد دور در یک کلاف



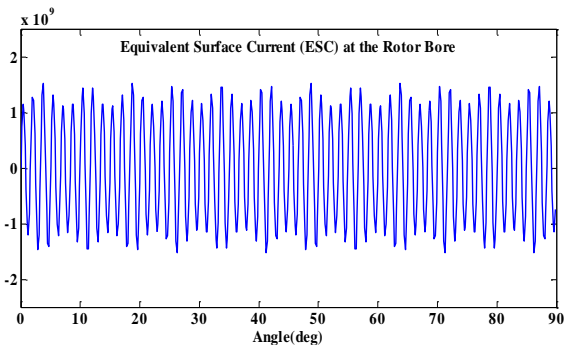
شکل (۱۰): مولفه x نیروی کشش مغناطیسی نامتعادل در بی باری



شکل (۱۱): مولفه y نیروی کشش مغناطیسی نامتعادل در بی باری.



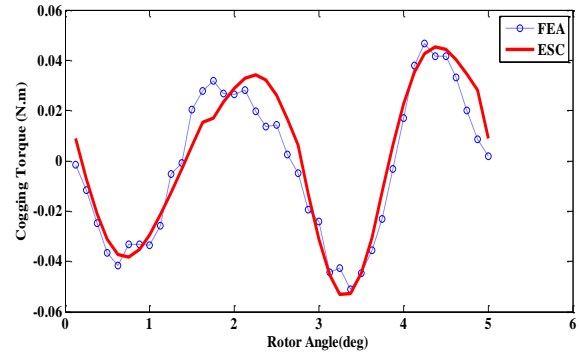
شکل (۱۲): ولتاژ back-EMF القا شده در فاز A.



شکل (۱۳): جریان معادل آهن‌رباهای روی سطح روتور،  $J_c(A/m)$  در موقعیت صفر رتور.

مقادیر به‌دست‌آمده اندوکتانس‌های خودی و متقابل فازهای a و b در شرایط رتور هم محور و ناهم محور با استاتور از روش‌های تحلیلی و اجزای محدود به‌دست‌آمده و در جدول (۲) آورده شده است.

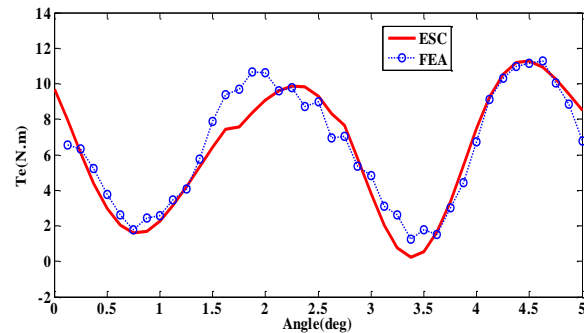
با استفاده از مولفه‌های چگالی شار ناشی از آهن‌ربا و استفاده از رابطه‌ی (۱۴)، گشتاور دندانه ماشین ورنیه با ناهم‌محوری روتور به‌دست‌آمده و در شکل (۸) نشان داده شده است.



شکل (۸): گشتاور دندانه

هم‌چنین برای یافتن گشتاور سنکرون الکترومغناطیسی، جریان‌های سه فاز (۲۶) در نظر شده‌اند. شکل (۹) گشتاور الکترومغناطیسی ماشین ورنیه به‌دست آمده توسط روش تحلیلی و روش اجزای محدود در شرایط ناهم‌محوری را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} i_a &= \sqrt{2} \cos(p\theta_r - \frac{\pi}{6}) \\ i_b &= \sqrt{2} \cos(p\theta_r - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}) \\ i_c &= \sqrt{2} \cos(p\theta_r - \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}) \end{aligned} \quad (26)$$



شکل (۹): گشتاور الکترومغناطیسی.

با استفاده از مولفه‌های چگالی شار ناشی از آهن‌ربا و استفاده از رابطه‌های (۱۶) و (۱۷) مولفه‌های x و y کشش نامتعادل توسط روش تحلیلی در شرایط بی باری به‌دست‌آمده و در شکل‌های (۱۰) و (۱۱) با روش اجزای محدود مقایسه شده است. در شکل (۱۲) نمودار ولتاژ back-EMF القا شده در فاز a به‌دست‌آمده از (۲۱) و روش اجزای محدود) گزارش شده است. جریان‌های مجازی معادل آهن‌ربای رتور ( $J_c(A/m)$ ) برای موقعیت صفر رتور در شکل (۱۳) آورده شده است.



- [7] A. Toba and T. A. Lipo, "Generic torque-maximizing design methodology of surface permanent-magnet Vernier machine," IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 36, No. 6, pp. 1539-1545, 2000.
- [8] K. O. Okada, N. Niguchi, and K. Hirata, "Analysis of a Vernier motor with concentrated windings," IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 49, No. 5, pp. 2241-2244, 2013.
- [9] L. Wu, R. Qu, D. Li and Y. Gao, "Influence of Pole Ratio and Winding Pole Numbers on Performances and Optimal Design Parameters of Surface Permanent Magnet Vernier Machines," IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 49, No. 5, pp. 2241-2244, 2013.
- [10] G. Liu, S. Jiang, W. Zhao, and Q. Chen, "A New Modeling Approach for Permanent Magnet Vernier Machine With Modulation Effect Consideration," IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 53, No. 1, 2017.
- [11] Y. Oner, Z. Q. Zhu, L. J. Wu and X. Ge, "Analytical sub-domain model for predicting open-circuit field of permanent magnet Vernier machine accounting for tooth tips," *Compel*, Vol.35, No. 2, pp. 624-640, 2016.
- [12] Y. Oner, Z. Q. Zhu, L. J. Wu, X. Ge, H. Zhan and J. T. Chen, "Analytical On-Load Subdomain Field Model of Permanent-Magnet Vernier Machines," IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.63, No. 7, pp. 4105-4117, 2016.
- [13] Y. Yang, G. Liu, X. T. Yang, and X. Wang, "Analytical Electromagnetic Performance Calculation of Vernier Hybrid Permanent Magnet Machine," IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 54, No. 6, ID. 8202612, 2018.
- [14] D. Li, R. Qu, J. Li, L. Xiao, L. Wu, and W. Xu, "Analysis of Torque Capability and Quality in Vernier Permanent-Magnet Machines," IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 52, No. 1, pp. 125-135, 2016.
- [15] D. Thyroff, C. Hittinger, I. Hahn, "Analytic Power Factor Calculation for Vernier Machines with Concentrated Windings," IEEE IEMDC, pp. 21-24, 2017.
- [16] D. Thyroff, and I. Hahn, "Optimization of the Flux Modulation Poles for Vernier Machines with Concentrated Windings," IEEE WEMDCD, pp. 20-21, 2017.
- [17] D. Zarko, D. Ban and T. A. Lipo, "Analytical calculation of magnetic field distribution in the slotted air gap of a surface permanent-magnet motor using complex relative air-gap permeance," IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 42, No. 7, pp. 1-8, 2006.
- [18] K. Boughara, D. Zarko, R. Ibtouen, O. Touhami, and A. Rezzoug, "Magnetic Field Analysis of Inset- and Surface-Mounted Permanent Magnet synchronous motors using Schwarz-Christoffel transformation", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 45, No.8, pp. 1828-1837, 2009.
- [19] T. C. O. Connell, and P. T. Krein, "A Schwarz-Christoffel-Based Analytical Method for Electric Machine Field Analysis," IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol.24, No. 3, pp. 565-577, 2009.
- [20] K. J. Binns, P. J. Lawrenson, C. W. Trowbridge, "The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields," John Wiley, 1998.
- [21] S. T. Boroujeni, P. Jalali, N. Bianchi, "Analytical modeling of no-load eccentric slotted surface mounted PM machines: cogging torque and radial force," IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, No. 2, pp. 754-760, 2015.
- [22] U. Kim and D. K. Lieu, "Magnetic Field Calculation in Permanent Magnet Motors with Rotor Eccentricity: With Slotting Effect Considered," IEEE Transactions on Magnetics, vol. 34, no. 4, pp. 2253-2266, 1998.

جدول (۲): اندوکتانس‌های فاز a و b در ماشین‌ورنیه مورد مطالعه

رتور نا هم محور		رتور هم محور		اندوکتانس (mH)
FEA	تحلیلی	FEA	تحلیلی	
29.02	27.4	27.8	26.8	<b>Laa</b>
-14.85	-13.8	-14.1	-13.2	<b>Lab</b>

با توجه به نتایج به‌دست‌آمده از روش تحلیل و مقایسه آنها در شکل‌های (۴) تا (۱۲) و جدول (۲) با نتایج روش اجزا محدود می‌توان مشاهده کرد که مدل پیشنهادی دقت مناسبی برای تحلیل ماشین‌ورنیه آهنربای سطحی در شرایط ناهم‌محوری رتور دارد.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مدل برای ماشین‌ورنیه آهنربایی با استاتور شیاردار و رتور ناهم‌محور معرفی شد. مدل ارائه شده توانایی پیش‌بینی رفتار ماشین در شرایط بی‌باری و بارداری ماشین را دارا می‌باشد. در این مدل از نگاشت‌های هم‌نوا استفاده شده و برای محدودیت این روش یعنی حاکم بودن رابطه لاپلاس، آهن‌رباهای رتور و سیم‌پیچی آرمیچر به ترتیب با جریان‌های معادل در سطح رتور و در دهانه باز شیارهای واقعی استاتور جایگزین شده‌اند. در نهایت نتایج چگالی شار و گشتاور دندانه، گشتاور الکترومغناطیسی، کشش نامتعادل مغناطیسی، اندوکتانس‌ها و back-EMF به‌دست‌آمده با روش اجزا محدود مقایسه و تایید شده‌اند.

## ۶. مراجع

- [1] F. Zhao, T. A. Lipo and B. I. Kwon, "A novel dual-stator axial-flux spoke-type permanent magnet Vernier machine for direct-drive application," IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 50, No. 11, ID. 8104304, 2014.
- [2] J. Li, K. T. Chau, J. Z. Jiang, C. Liu and W. Li, "A new efficient permanent-magnet Vernier machine for wind power generation," IEEE Trans. Magn., Vol. 46, No. 6, pp. 1475-1478 2010.
- [3] S. U. Chung, J. W. Kim, B. C. Woo, D. K. Hong, J. Y. Lee, and D. H. Koo, "A novel design of modular three-phase permanent magnet vernier machine with consequent pole rotor," IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 47, No.10, pp.4215-4218, 2011.
- [4] A. Rahideh, A. Vahaj, M. Mardaneh, and T. Lubin, "Two-dimensional analytical investigation of the parameters and the effects of magnetisation patterns on the performance of coaxial magnetic gears," IET Electric Power Applications, Vol. 7, No.3, pp. 230-245, 2017.
- [5] E. Spooner and L. Haydock, "Vernier hybrid machines" IEE Proc.-Electric Power Applications, Vol. 150, No. 6, pp. 655-662, 2003.
- [6] B. Kim and T. A. Lipo, "Operation and Design Principles of a PM Vernier motor," IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 50, No. 6, pp. 3656-3663, 2014.

- [25] S. Taghipour, M. H. Hajare, "Cogging torque optimization in SPM machines using segmented block PMs," Journal of Applied Electromagnetic, vol.2, no.4, pp. 31-38, 2014.
- [26] M. Alizade, V. Zamani, "Multi-objective optimization of the rotor geometry in SPM machines," Journal of Applied Electromagnetic, vol.2, no.2, pp. 21-32, 2014.
- [23] P. Jalali, S. T. Boroujeni, and N. Bianchi, "Analytical modeling of slotless eccentric surface-mounted PM machines using a conformal transformation," IEEE Transaction on Energy Conversion, Vol.32, No. 2, pp. 658-666, 2017.
- [24] S. T. Boroujeni and H. Bagheri, "Analytical modeling and prototyping a slotless PM-inset machine," IET Electric Power Applications, Vol. 11, No. 3, pp. 312-322, 2017.

---

**Analytical Modeling of Eccentric SPM Vernier Machine**

**k. Sheibani, S. Taghipour Boroujeni\*, G. Arab Markade**

**Shahrekord University**

(Received: 27/09/2019, Accepted: 03/02/2020)

**Abstract**

In this paper the flux density components in the eccentric slotted surface mounted PM Vernier machine are obtained analytically at on-load and no-load conditions. In the modeling process some conformal transformations, including Schwartz Christoffel and bilinear transformations are applied. In addition, the Laplace solution is used to obtain the air gap flux density of the PMs and the armature reaction. To overcome the limitations of existing conformal transformation-based models, the concept of equivalent magnetization current and the uniqueness theorem are adopted. In the provided model, the air gap flux density, the machine cogging torque and the electromagnetic torque are obtained analytically. Finally, the obtained results are compared with the results of finite element analysis.

**Keywords:** Vernier PM machines, Eccentricity, Conformal transformation, Equivalent surface current, Armature reaction

---

\* Corresponding author E-mail: s.taghipour@sku.ac.ir