

---

## **Dynamic Modeling of Unbalanced Magnetic Pull in Eccentric Wound Rotor Induction Machine**

**A. Khalili<sup>1</sup>, S. Taghipour Boroujeni<sup>2\*</sup>, Abdoreza Rabiee<sup>3</sup>**

\* University of Shahrekord, Shahrekord, Iran

(Received: 30/03/2020; Accepted: 11/10/2020)

### **Abstract**

*In this paper, a dynamic model is provided to obtain the waveform of the unbalanced magnetic force in the wound rotor induction machines with static eccentricity. The provided dynamic model is based on the voltage state-space equations of the coupled circuits in the eccentric induction machine. In the model the slotting effect and saturation is neglected and the slot ampere turn is distributed on the slot opening. To avoid computation of the air gap flux density and evade of magnetic pressure integration in each time-step of Runge-Kutta computations and consequently reducing the computation time of dynamic simulations, a static function of the stator and rotor windings' currents are proposed for computation of the unbalanced magnetic force. The parameter of the proposed function is obtained by analyzing the air gap field density by using winding function theory. Finally, the waveform of the unbalanced magnetic force of the eccentric induction machine is obtained and verified by time-stepping finite element analysis.*

**Keywords:** Dynamic Simulation, Wound Rotor Induction Machine, State-Space, Static Eccentricity, Time-Stepping Finite Element Analysis, Unbalanced Magnetic Pull

---

\* Corresponding author E-mail: s.taghipour@sku.ac.ir

## الگوی پویای کشش نامتعادل مغناطیسی ماشین القایی رتور سیم پیچی شده در شرایط ناهم محوری رتور

عباس خلیلی<sup>۱</sup>، صمد تقی پور بروجنی<sup>۲\*</sup>، عبدالرضا ربیعی<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری، ۲ و ۳- دانشیار، دانشکده فنی دانشگاه شهرکرد، ایران

(دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۱۱، پذیرش: ۱۳۹۹/۰۷/۰۲)

### چکیده

در این مقاله یک الگوی پویای فضای حالت برای ماشین القایی رتور سیم پیچی ارائه شده است. در الگو ارائه شده اثر هارمونیک‌های فضایی چگالی شار فاصله هوایی با لحاظ توزیع غیرسینوسی سیم پیچ‌های رتور و استاتور لحاظ شده است. همچنین ناهم محوری استاتیکی رتور در مدل پیشنهادی در نظر گرفته شده است. افزون بر متغیرهای جریان سیم پیچ‌ها و گشتاور الکترومغناطیسی، مدل پیشنهادی توانایی پیش بینی مولفه‌های کشش نامتعادل شعاعی را نیز دارد. از آنجایی که هدف مدل سازی استفاده از آن در شبیه سازی‌های دینامیکی ماشین می باشد، به منظور تسریع در زمان شبیه سازی یک تابع ایستایی بر حسب متغیرهای حالت برای کشش نامتعادل مغناطیسی ارائه شده است. مولفه‌های این تابع استاتیکی همانند اندوکتانس‌ها از تحلیل مغناطیسی ماشین به دست آمده‌اند. اگرچه برای یافتن تابع ارائه شده از تانسور تنش ماکسول استفاده شده است، در به دست آوردن کشش نامتعادل شعاعی نیاز به محاسبه چگالی شار و انتگرال گیری از فشار مغناطیسی برای یافتن نیرو نمی باشد. در نهایت مدل ارائه شده با روش تحلیل گذرای اجزای محدود تایید شده است.

**کلید واژه‌ها:** شبیه سازی دینامیکی، ماشین القایی رتور سیم پیچی شده، فضای حالت، ناهم محوری استاتیکی رتور، تحلیل اجزای محدود گذرا، کشش نامتعادل مغناطیسی

### ۱- مقدمه

این سیگنال‌ها، استفاده از یک مدل کامل ماشین که توانایی پیش بینی رفتار دینامیکی ماشین را دارد، می باشد. این مدل باید از دو ویژگی اساسی برخوردار باشد. نخست حجم محاسبات این مدل کم باشد، زیرا این مدل در روند محاسبات حل معادلات دیفرانسیل با روش رانگ-کوتا قرار می گیرد و نیاز به حل در تعداد بازه‌های زمانی زیادی دارد. همچنین در صورت تغذیه ماشین با مبدل‌های الکترونیک قدرت باید این گام‌های زمانی بسیار کوچک باشد، تا بالاترین فرکانس‌های موجود در ولتاژ پایانه‌های ماشین را پایش و دنبال کند. در نتیجه حجم این محاسبات بسیار زیاد است. از طرفی اگر حجم محاسبات مدل دینامیکی کم باشد، می توان شرایط زیادی را شبیه سازی و مطالعه نمود. ویژگی دوم مدل مورد نظر توانایی مدل در پیش بینی متغیرهای متنوع ماشین مانند چگالی شار، شار پیوندی، جریان، امپدانس، گشتاور، فشار مغناطیسی و کشش نامتعادل می باشد. نظر به استفاده از یک مدل مناسب برای تحلیل ماشین در شرایط خطا روش‌های مدل سازی گوناگونی پیشنهاد و به کار برده شده‌اند. از روش اجزای محدود به عنوان یکی از دقیق ترین روش‌های مدل سازی برای تحلیل ماشین القایی در شرایط ناهم محوری رتور استفاده شده است [۱-۲].

ماشین‌های القایی به عنوان پرکاربردترین ماشین‌ها در صنعت شناخته می شوند. به دلیل اهمیت این ماشین‌ها، پژوهش‌های گسترده و عمیقی در مدل سازی رفتار آن‌ها، طراحی، بهینه سازی و کنترل این ماشین‌ها انجام شده است. همچنین به دلیل اهمیت کارکرد مداوم این ماشین‌ها، روش‌های متنوعی برای تشخیص خطا و عیب یابی ماشین القایی ارائه شده است.

از جمله خطاهای رایج ماشین‌های القایی، خطای ناهم محوری رتور می باشد که به دلیل عدم دقت در ساخت ماشین و یا خرابی بلبرینگ‌ها ایجاد می شود. در صورت عدم تشخیص این عیب، خطای خروج از مرکز به صورت پیش رونده آسیب‌های جدی تری را وارد می کند و در نهایت خروج کامل ماشین از فرآیند تولید و خسارت‌های مالی ناشی از آن را سبب می شود. به دلیل اهمیت تشخیص به هنگام این خطا روش‌های مختلفی بر پایه پایش جریان سیم پیچ‌ها و یا اندازه گیری متغیرهای دیگری همچون گشتاور و یا امپدانس ماشین ارائه شده است. اساس کار یافتن نشانه خطا در

\* نویسنده مسئول: s.taghipour@sku.ac.ir

معرفی می‌شوند. بر پایه شاخص‌های به‌دست آمده و با استفاده از قوانین فیزیکی حاکم بر مسئله در بخش سوم مدل فضای حالت ماشین القایی با رتور ناهم محور استخراج می‌شود. در پایان در بخش چهارم نتایج الگوی پیشنهادی با نتایج به‌دست آمده از روش اجزای محدود گذرا مقایسه و تایید می‌شوند.

## ۲- الگوسازی مغناطیسی

برای مدل‌سازی دینامیکی ماشین القایی با رتور ناهم‌محور از روش مدارهای تزویج شده بهره گرفته شده است. از آنجایی که هدف مدل به‌کار بردن آن در شبیه‌سازی‌های دینامیکی است، از اشباع مغناطیسی چشم‌پوشی می‌شود. در واقع چشم‌پوشی از اشباع مغناطیسی یک فرض رایج در شبیه‌سازی‌های دینامیکی بوده و برای کاهش زمان و حجم محاسبات مورد نیاز برای شبیه‌سازی‌های دینامیکی در نظر گرفته می‌شود. مدارهای در نظر گرفته شده در مدل القایی رتور سیم‌پیچی شده شامل سه مدار در رتور و سه مدار در استاتور می‌باشد. محاسبه اندوکتانس‌های خودی و متقابل برای تحلیل مدارهای تزویج شده امری لازم و ضروری می‌باشد. همچنین اطلاع از چگونگی توزیع چگالی شار فاصله‌هایی برای محاسبه اندوکتانس‌های خودی و متقابل و همچنین ثوابت کشش نامتعادل مغناطیسی بسیار مهم است. ادامه به این امر پرداخته خواهد شد.

### ۲-۱- روش تابع سیم‌پیچ

روش تابع سیم‌پیچ یک روش ساده و کارا در یافتن چگالی شار فاصله‌هایی است [۳-۶]. در حالت کلی لازم است استفاده از این روش اطلاع از مسیرهای شار پیش از حل مسئله است. البته این پیش‌بینی در ماشین‌های با فاصله‌هایی موثر بزرگ مانند ماشین‌های آهنربایی و یا ماشین سنکرون رلوکتانسی دشوار بوده و با عدم دقت زیادی همراه است. به‌دلیل آن‌که فاصله‌های ماشین القایی کوچک است می‌توان از مولفه مماسی چگالی شار چشم‌پوشی نمود و با دقت خوبی چگالی شار فاصله‌هایی را به‌دست آورد.

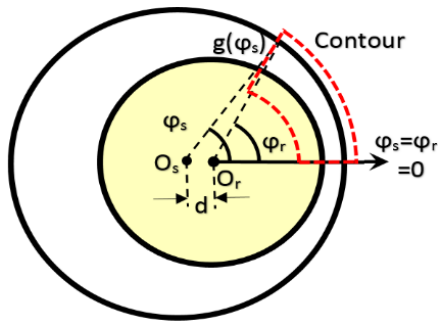
به‌منظور یافتن چگالی شار فاصله‌هایی از قوانین آمپر و گاوس استفاده خواهد شد. شکل (۱) نمای یک ماشین القایی با رتور ناهم‌محور را نشان می‌دهد. طبق قانون آمپر میزان افت نیروی محرکه مغناطیسی در طول کانتور در نظر گرفته شده برابر با مقدار جریان عبوری از سطح کانتور می‌باشد که این موضوع در رابطه (۱) آورده شده است.

$$B_g(\phi_s, \theta_r) = \frac{\mu_0 \cdot AT(\phi_s, \theta_r) - B_g(0, \theta_r)g(0)}{g(\phi_s)} \quad (1)$$

اگر چه روش اجزای محدود توانایی در نظر گرفتن جزئیات هندسی و آثار غیرخطی اشباع مغناطیسی را دارد، به‌دلیل حجم بالای محاسبات، برای تحلیل خطای ناهم‌محوری در گام‌های نخست مطالعه مناسب نیست. به‌منظور کاهش زمان محاسبه، روش شبیه‌سازی بر پایه استفاده از مدارهای تزویج ارائه شده است [۳]. اگر چه در [۳] اثر ناهم‌محوری رتور در نظر گرفته نشده است. ناهم‌محوری رتور دارای انواع استاتیک [۳]، دینامیکی [۴ و ۵] و ناهم‌محوری [۶ و ۷] طولی تقسیم‌بندی می‌شود. البته اساس تحلیل تمام انواع ناهم‌محوری همان تحلیل ناهم‌محوری استاتیک و استفاده از روش تابع سیم‌پیچ ارائه شده در [۸] می‌باشد. بنابراین در این مقاله نیز بدون از دست دادن عمومیت مسئله ناهم‌محوری استاتیکی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. از آنجایی که هدف استفاده از مدل مورد نظر به‌کارگیری آن در شرایط دینامیک است و نیاز به پردازش بالا مد نظر می‌باشد، چشم‌پوشی از اشباع مغناطیسی در این مدل‌ها بسیار رایج است.

اگر چه مدل‌های ارائه شده بر پایه فضای حالت در [۸-۳] بسیار کارا می‌باشند، اما تاکنون در هیچ کدام از آن‌ها شکل موج کشش نامتعادل مغناطیسی ارائه نشده است. کشش نامتعادل مغناطیسی یک نمایه خوب از وجود خطای خروج از مرکز بوده و می‌تواند در فرآیندهای شناسایی خطا به‌کار رود. روش محاسبه کشش نامتعادل مغناطیسی بر پایه روش ماکسول و انتگرال‌گیری از شار مغناطیسی می‌باشد [۹-۱۱]. برای استفاده از این روش نیاز به محاسبه چگالی شار همه نقاط فاصله‌های، محاسبه فشار مغناطیسی و در نهایت انتگرال‌گیری از فشار مغناطیسی در هر گام محاسبه رفتار دینامیکی با استفاده از روش رانگ-کوتا می‌باشد، که این موضوع حجم محاسبات را بالا می‌برد. به همین دلیل در [۱۲] با استفاده از حسگرهای نیرو برای اندازه‌گیری کشش نامتعادل مغناطیسی اقدام شده است.

در این مقاله هدف یافتن یک مدل دینامیکی برای بررسی کشش نامتعادل مغناطیسی در ماشین القایی رتور سیم‌پیچی شده می‌باشد. به‌منظور کاهش زمان شبیه‌سازی یک تابع استاتیکی از متغیرهای حالت برای پیش‌بینی کشش نامتعادل مغناطیسی پیشنهاد و استفاده شده است. در ادامه در بخش دوم، با لحاظ نمودن خروج از مرکز، چگالی شار فاصله‌هایی و پارامترهای ماشین القایی رتور سیم‌پیچی شده به‌دست می‌آیند. در واقع نوآوری این پژوهش در ارائه یک تابع استاتیکی برای کشش نامتعادل مغناطیسی بر حسب متغیرهای حالت مسئله می‌باشد. این تابع برای نخستین بار ارائه شده و زمان مورد نیاز برای شبیه‌سازی را کاهش می‌دهد. در ادامه در بخش دوم با استفاده از روابط اساسی الکترومغناطیس، چگالی شار فاصله‌های، ثابت گشتاور و برای نخستین بار ثابت کشش نامتعادل مغناطیسی



شکل (۱): رتور و استاتور ماشین القایی ناهم‌محور.

$$L_{ij}(\theta_r) = \quad (7)$$

$$L_{stk} R_s \int_0^{2\pi} C_i(\phi_s, \theta_r) W_i(\phi_s, \theta_r) d\phi_s$$

$$L_{ij}(\theta_r) = \quad (8)$$

$$L_{stk} R_s \int_0^{2\pi} C_i(\phi_s, \theta_r) W_j(\phi_s, \theta_r) d\phi_s$$

که در آن  $C_i(\phi_s, \theta_r)$  توزیع چگالی شار فاصله هوایی برای ۱ آمپر جریان در مدار  $i$ ام بوده و  $W_i(\phi_s, \theta_r)$  در رابطه (۹) آورده شده است.

$$W_i(\phi_s, \theta_r) = \int_0^{\phi_s} T_{ri}(\phi_s, \theta_r) d\phi_s - \frac{n_{ri}(2\pi, \theta_r)}{2\pi} \quad (9)$$

برای محاسبه مقدار گشتاور الکترومغناطیسی می‌توان از رابطه تغییرات کوانترژی (۱۰) استفاده نمود. استفاده از رابطه (۱۰) نیازمند دانستن چگالی شار و انتگرال‌گیری از آن‌ها می‌باشد. از آنجایی که برای شبیه‌سازی دینامیکی نیاز به محاسبه متغیر گشتاور الکترومغناطیسی در هر گام زمانی محاسبات حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر ماشین و در پی آن محاسبه چگالی شار فاصله هوایی و انتگرال‌گیری می‌باشد، زمان و حجم محاسبات مورد نیاز شبیه‌سازی بسیار طولانی خواهد شد. راهکار دیگر که مورد پذیرش قرار گرفته است، استفاده از رابطه (۱۱) برای محاسبه گشتاور است.

$$T_e = \frac{\partial W_c}{\partial \theta_r} \quad (10)$$

$$T_e = 0.5 * \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix}^T \frac{\partial \mathbf{L}(\theta_r)}{\partial \theta_r} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} \quad (11)$$

که در آن  $B_g$  چگالی شار فاصله هوایی،  $\theta_r$  موقعیت زاویه‌ای رتور،  $\phi_s$  موقعیت زاویه‌ای نقطه مورد نظر و  $AT$  جریان عبوری از کانتور در نظر گرفته شده و  $g$  تابع فاصله هوایی ماشین است که رابطه در (۲) ارائه شده است.

$$g(\phi_s) \approx g_0 - d \cos(\phi_s) \quad (2)$$

که در آن  $g_0$  کمترین مقدار فاصله هوایی ماشین در نقطه  $\phi_s=0$  و  $D$  میزان فاصله محورهای رتور و استاتور می‌باشد. مقدار آمپر-دور عبوری از کانتور،  $AT$  در (۳) و بر حسب تعداد دور فازها، جریان آن‌ها و موقعیت رتور آورده شده است، که در آن  $T$  عملگر ترانزپوز بوده،  $n$  توابع سیم‌پیچی تجمیع شده است.

$$AT = \begin{bmatrix} n_{as}(\phi_s) \\ n_{bs}(\phi_s) \\ n_{cs}(\phi_s) \\ n_{ar}(\phi_s, \theta_r) \\ n_{br}(\phi_s, \theta_r) \\ n_{cr}(\phi_s, \theta_r) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{as} \\ I_{bs} \\ I_{cs} \\ I_{ar} \\ I_{br} \\ I_{cr} \end{bmatrix} \quad (3)$$

با دانستن الگوی سیم‌پیچی استاتور و رتور،  $T$  که در واقع چگالی دور در یکای زاویه (بر حسب رادیان) است، توابع سیم‌پیچی تجمیع شده به‌صورت رابطه (۴) به‌دست می‌آیند.

$$n_{abcs}(\phi_s) = \int_0^{\phi_s} T_{abcs}(\phi_s) d\phi_s \quad (4)$$

$$n_{abcr}(\phi_s, \theta_r) = \int_0^{\phi_s} T_{abcr}(\phi_s, \theta_r) d\phi_s$$

از آنجایی که تقارن فاصله هوایی به‌دلیل ناهم‌محوری رتور از بین رفته است، رابطه (۱) به تنهایی توانایی پیش‌بینی چگالی شار فاصله هوایی را ندارد و باید از قانون گاوس که در رابطه (۵) آورده شده است برای یافتن چگالی شار در زاویه صفر استفاده نمود.

$$\int_0^{2\pi} B_g(\phi_s, \theta_r) d\phi = 0 \quad (5)$$

با جایگذاری رابطه (۱) در رابطه (۵)، مقدار چگالی شار در زاویه صفر برابر با رابطه (۶) به‌دست می‌آید.

$$B_g(0, \theta_r) = \frac{\int_0^{2\pi} \mu_0 g^{-1}(\phi_s) AT(\phi_s, \theta_r) d\phi}{g(0) \cdot \int_0^{2\pi} g^{-1}(\phi_s) d\phi} \quad (6)$$

## ۲-۲- اندوکتانس‌ها و ثوابت کشش نامتعادل و گشتاور الکترومغناطیسی

با دانستن چگالی شار فاصله هوایی، اندوکتانس‌های خودی مدار  $i$ ام و اندوکتانس‌های متقابل مدار  $i$ ام و  $j$ ام را به‌ترتیب به‌صورت روابط (۷) و (۸) به‌دست آورده می‌شوند [۱۳].

$$F_x = \frac{rL_{stk}}{2\mu_0} I_i I_j \int_0^{2\pi} \sum_i \sum_j C_i(\phi_s, \theta_r) C_j(\phi_s, \theta_r) \sin(\phi_s) d\phi_s \quad (14)$$

$$F_y = \frac{rL_{stk}}{2\mu_0} I_i I_j \times \int_0^{2\pi} \sum_i \sum_j C_i(\phi_s, \theta_r) C_j(\phi_s, \theta_r) \cos(\phi_s) d\phi_s$$

در رابطه (۱۵) یک ماتریس جدید به نام  $K$  تعریف شده است. با استفاده از این تعریف مولفه‌های کشش نامتعادل مغناطیسی به صورت ساده شده در رابطه (۱۶) نمایش داده می‌شود.

$$K(\phi_s, \theta_r) = [K_{ij}] \quad (15)$$

$$K_{ij}(\phi_s, \theta_r) = \frac{rL_{stk}}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} C_i(\phi_s, \theta_r) C_j(\phi_s, \theta_r) e^{j\phi_s} d\phi_s$$

$$F_x = \text{Re} \left( \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix}^T [k_{ij}] \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} \right) \quad (16)$$

$$F_y = \text{Im} \left( \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix}^T [k_{ij}] \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} \right)$$

همان‌گونه که از رابطه (۱۶) مشخص است برای محاسبه نیرو تنها نیاز به دانستن جریان‌ها و پارامترهای جدید تعریف شده در رابطه (۱۵) است و نیاز به محاسبه چگالی شار و انتگرال‌گیری از مجذور آن در هر گام شبیه‌سازی نمی‌باشد. در واقع پارامترهای  $K_{ij}$  مانند اندوکتانس‌ها یک‌بار محاسبه شده و پس از آن برای محاسبه نیرو در تمامی گام‌های زمانی شبیه‌سازی دینامیکی از آن‌ها استفاده می‌شود. در حالی که برای محاسبه نیرو از رابطه (۱۲) باید محاسبه میدان و انتگرال‌گیری‌ها برای هر گام زمانی انجام شود.

### ۳- مدل‌سازی دینامیکی فضای حالت

برای برپایی یک مدل فضای حالت، شار-دور پیوندی مدارهای رتور و استاتور، موقعیت رتور و سرعت زاویه‌ای آن به‌عنوان

در واقع رابطه (۱۱)، خود از تعریف اندوکتانس و جایگزینی آن در رابطه کوانترژی به‌دست آمده است. با محاسبه گشتاور از رابطه (۱۱) نیاز به محاسبه چگالی شار فاصله هوایی و انتگرال‌گیری از آن در هر گام محاسباتی از میان رفته و حجم محاسبات و زمان مورد نیاز شبیه‌سازی به میزان بسیار زیادی کاهش می‌یابد.

برای یافتن کشش نامتعادل الکترومغناطیسی می‌توان از تنش ماکسول و به‌صورت رابطه (۱۲) استفاده نمود، که در آن  $r$  و  $L_{stk}$  به‌ترتیب شعاع متوسط فاصله هوایی و طول پشته ماشین می‌باشند.

$$F_x = \frac{rL_{stk}}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} B^2(\phi_s, \theta_r) \cos(\phi_s) d\phi_s \quad (12)$$

$$F_y = \frac{rL_{stk}}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} B^2(\phi_s, \theta_r) \sin(\phi_s) d\phi_s$$

همانند محاسبه گشتاور از رابطه کوانترژی، استفاده از روابط (۱۲) برای محاسبه مولفه‌های نیرو نیاز به محاسبه چگالی شار فاصله هوایی و انتگرال‌گیری از آن در هر گام زمانی محاسبات حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر ماشین دارد. این کار زمان و حجم محاسبات بالایی را از شبیه‌سازی طلب می‌کند. به‌منظور یافتن پارامتری همچون اندوکتانس‌ها که زمان محاسبه گشتاور را کاهش می‌داد، و یافتن پارامترهایی برای محاسبه سریع مولفه‌های کشش نامتعادل، با توجه به فرض شرایط خطی بودن هسته و استفاده از قضیه جمع آثار، چگالی شار به‌صورت جمع چگالی شار ناشی از هر کدام از جریان‌های مدارهای در نظر گرفته شده در رتور و استاتور نوشته می‌شود. با این کار و جایگزینی چگالی شار در رابطه (۱۲)، مولفه‌های کشش مغناطیسی به‌صورت رابطه (۱۳) ظاهر می‌شوند.

$$F_x = \frac{rL_{stk}}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} \left( \sum_i B_i(\phi_s, \theta_r) \right)^2 \cos(\phi_s) d\phi_s \quad (13)$$

$$F_y = \frac{rL_{stk}}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} \left( \sum_j B_j(\phi_s, \theta_r) \right)^2 \sin(\phi_s) d\phi_s$$

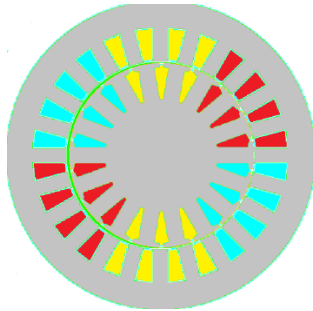
$$i, j \in \{as, bs, cs, ar, br, cr\}$$

با استفاده از تعریف ارائه شده برای  $C_i(\phi_s, \theta_r)$ ، مولفه‌های کشش نامتعادل مغناطیسی به‌صورت رابطه (۱۴) بازنویسی می‌شوند.

به‌منظور تایید مدل، از تحلیل اجزای محدود نرم‌افزار FLUX استفاده شده است.

جدول (۱): پارامترهای ماشین القایی مورد مطالعه

مقدار	نماد	پارامترهای ماشین
۱	$P$	زوج قطب
۲۲۰	$S_n(VA)$	توان نامی
۱۵۰	$V_n(\text{Volt})$	ولتاژ نامی (حداکثر)
۳	$I_n(A)$	جریان نامی (حداکثر)
۰/۵۷	$T_n(N.m)$	گشتاور نامی
۳۱۰	$\omega_n(\text{rad/s})$	سرعت نامی
۲۴/۱۸	$Q_s/Q_r$	تعداد شیارهای استاتور / رتور
۲۰۰/۷۵	$N_s/N_r$	تعداد دورهای استاتور / رتور
۲	$b_o(\text{mm})$	دهانه باز شیارهای استاتور و رتور
۵۰	$L_{sl}(\text{mm})$	طول پشته ماشین
۳۰	$R_s(\text{mm})$	شعاع استاتور
۰/۵	$g(\text{mm})$	طول فاصله هوایی
۰/۵	$J(\text{g.m}^2)$	لختی رتور
۶۰/۱۵	$L_{ls}/L_{lr}(\text{mH})$	اندوکتانس نشستی استاتور / رتور
۱/۵/۲/۵	$r_s/r_r(\Omega)$	مقاومت سیم‌پیچ استاتور / رتور
۰/۲	$d(\text{mm})$	مقدار خروج از مرکز



شکل (۲): هندسه ماشین القایی ناهم‌محور در نظر گرفته شده.

نخست مقادیر به‌دست آمده‌اند و کتانس‌های خودی و متقابل با روش اجزای محدود تایید شده‌اند. در جدول (۲) مقادیر اندوکتانس‌های خودی و متقابل استاتور داده شده‌اند. به‌دلیل وجود ناهم‌محوری رتور، اندوکتانس خودی فازهای استاتور کمی با یکدیگر متفاوت هستند. در شکل (۳-الف و ب) به‌ترتیب نمودارهای اندوکتانس‌های متقابل فازهای استاتور با فاز a رتور و اندوکتانس خودی فاز a رتور آورده شده است. از آن‌جایی که بر خلاف سیم‌پیچ‌های استاتور، فاصله هوایی دیده شده توسط سیم‌پیچ‌های رتور با تغییر زاویه رتور تغییر می‌کند، اندوکتانس خودی

متغیرهای حالت در نظر می‌شوند. با نوشتن روابط ولتاژی حاکم بر مدارهای در نظر گرفته شده و لحاظ رابطه قانون دوم نیوتن روابط حالت به‌صورت رابطه (۱۷) به‌دست می‌آیند که در آن  $T_m$  گشتاور مکانیکی است.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s \\ \mathbf{V}_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \theta_r = \omega_r \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} \omega_r = \frac{T_e - T_m}{J}$$

ماتریس متغیرهای شار، ولتاژ و جریان در رابطه (۱۸) و ماتریس مقاومت‌های استاتور و رتور در رابطه (۱۹) تعریف شده است که  $r_s$  و  $r_r$  مقاومت فازهای استاتور و رتور می‌باشند.

$$\lambda_{s,r} = \begin{bmatrix} \lambda_{as,r} & \lambda_{bs,r} & \lambda_{cs,r} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{V}_{s,r} = \begin{bmatrix} V_{as,r} & V_{bs,r} & V_{cs,r} \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

$$\mathbf{I}_{s,r} = \begin{bmatrix} I_{as,r} & I_{bs,r} & I_{cs,r} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{R}_{s,r} = \begin{bmatrix} r_{s,r} & 0 & 0 \\ 0 & r_{s,r} & 0 \\ 0 & 0 & r_{s,r} \end{bmatrix} \quad (19)$$

لازم به یادآوری است که مقادیر جریان‌ها با استفاده از معکوس ماتریس اندوکتانس‌ها و به‌صورت رابطه (۲۰) قابل محاسبه است که در آن مقادیر درایه‌های ماتریس  $\mathbf{L}$  از روابط (۷ و ۸) و مقادیر اندوکتانس‌های نشستی‌های استاتور و رتور از رابطه (۲۱) به‌دست خواهند آمد.

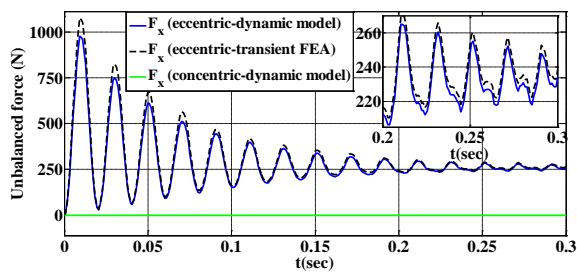
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} = \left( \mathbf{L}(\theta_r) + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ls} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{lr} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{L}_{ls,r} = \begin{bmatrix} L_{ls,r} & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls,r} & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls,r} \end{bmatrix} \quad (21)$$

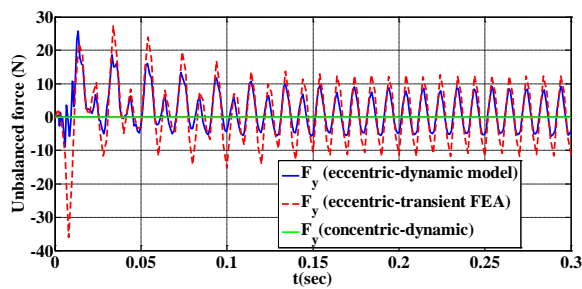
#### ۴- شبیه‌سازی و تایید نتایج

برای بررسی درستی مدل ارائه شده یک ماشین القایی با مشخصات ارائه شده در جدول (۱)، لحاظ شده است. اندوکتانس‌های نشستی استاتور و رتور و مقاومت رتور توسط شبیه‌سازی آزمایش اتصال کوتاه در نرم‌افزار FLUX به‌دست آورده شده‌اند. هندسه این ماشین در شکل (۲) آورده شده است.

آمده از روش اجزای محدود گذرا و مدل ارائه شده در شکل (۴) نمایش داده شده‌اند. در شکل (۵) گشتاور الکترو مغناطیسی به‌دست آمده از روش اجزای محدود گذرا و مدل به‌دست آمده نشان داده شده است. جریان‌های فاز استاتور به‌دست آمده از روش اجزای محدود گذرا و مدل پیشنهادی نیز به ترتیب در شکل (۶) آورده شده‌اند. با مقایسه نتایج به‌دست آمده از روش اجزای محدود گذرا و مدل پیشنهادی، درستی مدل پیشنهادی و توانایی آن در پیش بینی رفتار دینامیکی ماشین قابل تشخیص و تایید است. لازم به‌ذکر است گام زمانی حل روابط دیفرانسیلی در روش اجزای محدود و مدل بر پایه مدارهای مزدوج به‌ترتیب برابر  $250\mu s$  و  $1\mu s$  است. در واقع به‌دلیل زمان‌بر بودن محاسبات اجزای محدود گام زمانی محاسبات به‌صورت نسبی بزرگتر انتخاب شده است و شکستگی‌هایی که در نمودارهای به‌دست آمده از روش اجزای محدود گذرا نیز مشاهده می‌شود به‌دلیل این نکته است.

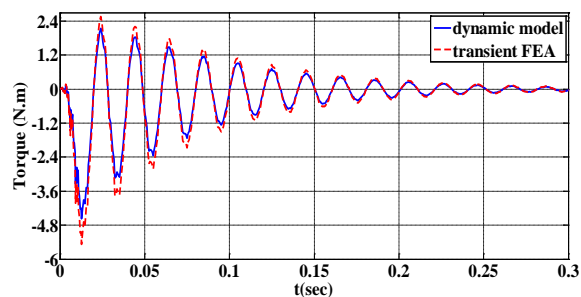


(الف)



(ب)

شکل (۴): مولفه‌های کشش نامتعادل مغناطیسی در سرعت ثابت رتور (الف) مولفه  $x$ ، (ب) مولفه  $y$ .

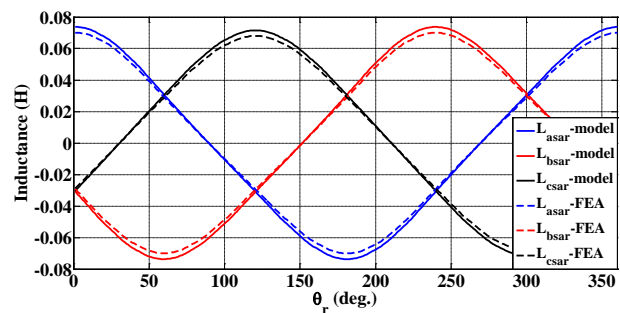


شکل (۵): گشتاور الکترومغناطیسی در سرعت ثابت رتور.

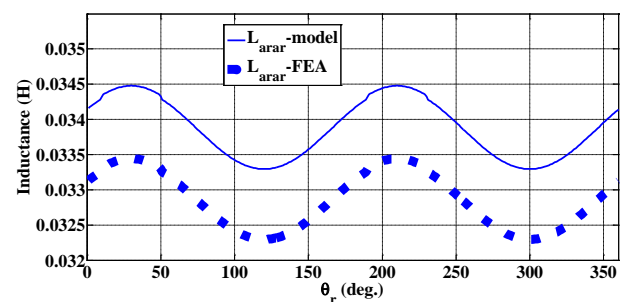
فازهای رتور ثابت نبوده و با تغییر زاویه رتور اندکی تغییر می‌کند. یادآور می‌شود اگر چه اندوکتانس‌های متقابل فازهای رتور با موقعیت رتور تغییر می‌کند ولی تغییرات آن بسیار ناچیز است. همچنین مقادیر اندوکتانس‌های متقابل فازهای رتور به‌دست آمده از مدل و روش اجزای محدود به ترتیب برابر با  $11/6$  mH و  $10/8$  mH است.

جدول (۲): اندوکتانس‌های خودی و متقابل استاتور بر حسب mH

L (mH)	فاز A		فاز B		فاز C	
	مدل	FEA	مدل	FEA	مدل	FEA
فاز A	۱۹۹	۱۹۶	-۸۰	-۷۷	-۸۳	-۷۹
فاز B	-۸۰	-۷۷	۱۹۸	۱۹۴	-۸۳	-۸۰
فاز C	-۸۳	-۷۹	-۸۳	-۸۰	۱۹۳	۱۸۹



(الف)



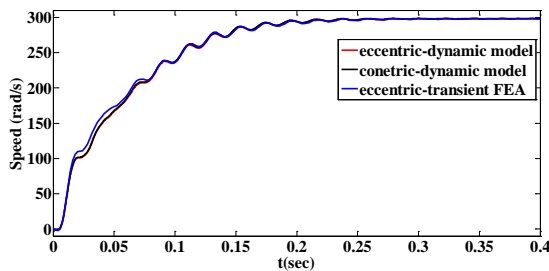
(ب)

شکل (۳): اندوکتانس‌های (الف) فاز a رتور با فازهای استاتور، (ب) خودی فاز a رتور.

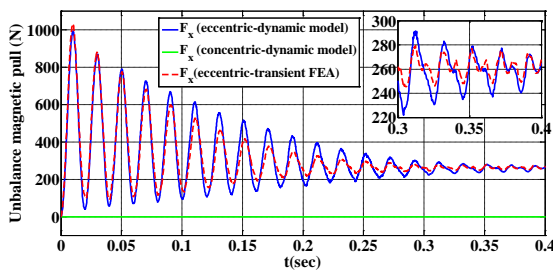
در گام دوم شبیه سازی شرایط اولیه شارها و موقعیت رتور برابر صفر و به منظور تسریع در شبیه سازی گذرای اجزای محدود سرعت اولیه رتور برابر با  $100\pi$  rad/s و در طول شبیه سازی ثابت در نظر گرفته شده‌اند. یک منبع ولتاژ سه فاز متعادل سینوسی با دامنه  $150V$  و فرکانس  $50Hz$  به عنوان ورودی مدل لحاظ شده است. همچنین فاز اولیه ولتاژ فاز a برابر صفر در نظر گرفته شده، از دینامیک رتور چشم‌پوشی شده و سرعت ثابت لحاظ شده است. مولفه‌های کشش نامتعادل مغناطیسی به‌دست

شکستگی‌هایی که در نمودارهای به‌دست آمده از روش اجزای محدود گذرا نیز مشاهده می‌شود به دلیل این نکته است. همچنین منحنی مولفه‌های کشش نامتعادل مغناطیسی به‌دست آمده از مدل دینامیکی پیشنهادی برای ماشین القایی سالم «رتور و استاتور هم‌محور در شکل (۸)» آورده شده و همان‌طور که انتظار می‌رود در شرایط هم‌محوری رتور و استاتور کشش نامتعادل صفر است. از آنجایی که نمودارهای سرعت و گشتاور الکترومغناطیسی در شکل‌های (۷ و ۹) به‌دست آمده‌اند، از نمایش آن‌ها چشم‌پوشی شده است.

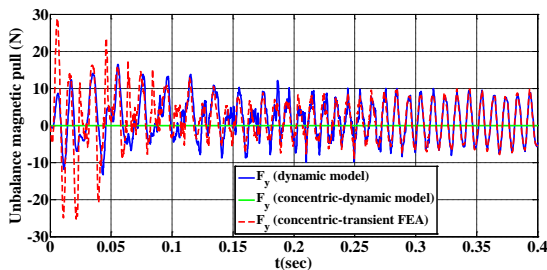
در نهایت یادآور می‌شود که در شبیه‌سازی‌های دینامیکی انجام شده چگالی شار هم تابع زمان و هم تابع مکان است که نمایش آن به‌صورت گرافیکی دشوار است. از طرفی یافتن مقادیر دقیق تمام متغیرهای ماشین (گشتاور، نیرو و ولتاژ القایی و جریان‌ها) بر پایه محاسبه دقیق چگالی شار بر حسب مکان و زمان است. بنابراین، می‌توان ادعا نمود از آنجایی که مقادیر تمام این متغیرها به درستی پیش‌بینی شده است، مقادیر چگالی شار به‌دست آمده حتماً درست بوده است.



شکل (۷): سرعت ماشین در راه‌اندازی زیر بار.

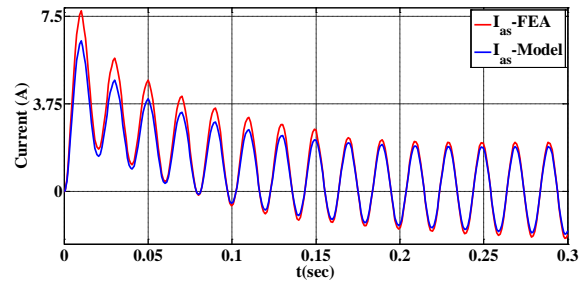


(الف)

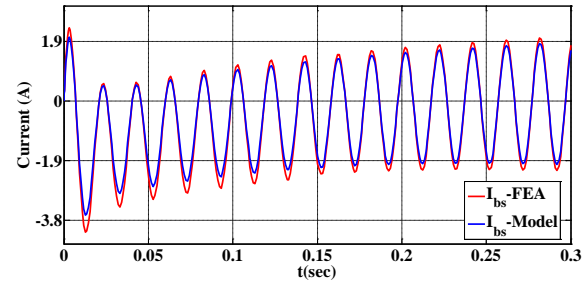


(ب)

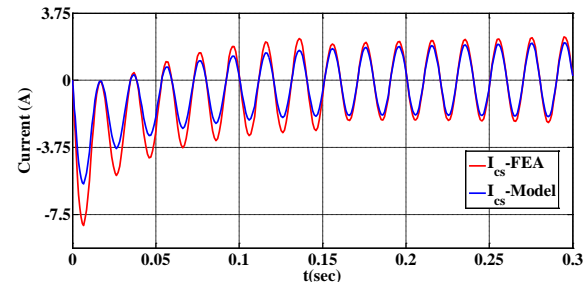
شکل (۸): کشش نامتعادل مغناطیسی در راه‌اندازی زیر بار (الف) مولفه  $x$ ، (ب) مولفه  $y$ .



(الف)



(ب)



(پ)

شکل (۶): جریان فازهای استاتور در سرعت ثابت رتور در فازهای (الف) a، (ب) b و (پ) c استاتور.

در گام سوم، شبیه‌سازی ماشین در راه‌اندازی زیر بار انجام شده است. مانند شبیه‌سازی پیش یک منبع ولتاژ سه فاز متعادل سینوسی با دامنه  $150\text{V}$  و فرکانس  $50\text{Hz}$  به‌عنوان ورودی مدل لحاظ شده است. همچنین فاز اولیه ولتاژ فاز  $a$  برابر صفر و گشتاور بار  $T_I = 0/3\text{N.m}$  در نظر گرفته شده است. نمودارهای سرعت، مولفه‌های کشش نامتعادل مغناطیسی، گشتاور الکترومغناطیسی و جریان‌ها به‌ترتیب در شکل‌های (۱۰-۷) آورده شده‌اند. با مقایسه نتایج به‌دست از روش اجزای محدود گذرا و مدل پیشنهادی درستی مدل پیشنهادی و توانایی آن در پیش‌بینی رفتار دینامیکی ماشین قابل تشخیص و تایید است. زمان مورد نظر برای محاسبه مولفه‌های نیرو در این شبیه‌سازی با روش‌های اجزای محدود، رابطه (۱۲) و رابطه (۱۶) به‌ترتیب برابر با  $45\text{ms}$  دقیقه،  $456\text{ms}$  و  $252\text{ms}$  است. همچنین لازم به‌ذکر است گام زمانی حل روابط دیفرانسیلی در روش اجزای محدود و مدل بر پایه مدارهای مزدوج به‌ترتیب برابر  $250\mu\text{s}$  و  $1\mu\text{s}$  است. در واقع به‌دلیل زمان‌بر بودن محاسبات اجزای محدود گام زمانی محاسبات به‌صورت نسبی بزرگتر انتخاب شده است و

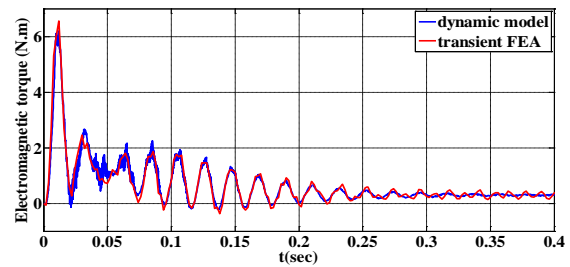


## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله یک مدل دینامیکی فضای حالت برای ماشین القایی رتور سیم پیچی شده با ناهم محوری استاتیکی ارائه شد. مدل پیشنهادی علاوه بر پیش بینی متغیرهای جریان فازها و گشتاور الکترومغناطیسی توانایی پیش بینی مولفه های کشش نامتعادل مغناطیسی را نیز دارد. به منظور یافتن مولفه های کشش نامتعادل مغناطیسی در زمان کوتاه و کاهش حجم محاسبات مورد نیاز آن یک ماتریس جدید K معرفی شد که در المان های آن میزان نیروی تولیدی ناشی از برهم کنش چگالی شار تولیدی ناشی از یک آمپر جریان در مدارهای  $i_m$  و  $i_a$  را نشان می دهد. برای محاسبه چگالی شار و در پی آن محاسبه اندوکتانس ها و المان های ماتریس K از روش تابع سیم پیچ استفاده شده است. در نهایت با استفاده از شبیه سازی اجزای محدود گذرا مدل پیشنهادی تایید شد و رفتار ماشین در زیر بار مورد بررسی و تایید قرار گرفت.

## ۶- مراجع

- [1] J. Faiz, B. M. Ebrahimi, B. Akin, and H. A. Toliyat, "Finite-Element Transient Analysis of Induction Motors Under Mixed Eccentricity Fault," IEEE Trans. Magn., vol. 44, no. 1, pp. 66-74, Jan. 2008.
- [2] L. Alberti, N. Bianchi, and S. Taghipour Boroujeni, "Finite element estimation of induction motor parameters for sensorless applications," COMPEL., vol. 31, no. 1, pp. 191-205.
- [3] X. Luo, Y. Liao, H. Toliyat, A. El-Antably, and T. A. Lipo, "Multiple coupled circuit modeling of induction machines," IEEE Trans. Ind. Applicat., vol. 31, pp. 311-318, Mar./Apr. 1995.
- [4] G. M. Joksimovic, M. D. Durovic, J. Penman, and N. Arthur, "Dynamic simulation of dynamic eccentricity in induction machines-winding function approach," IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 15, no. 2, pp. 143-148, 2000.
- [5] G. M. Joksimović, "Dynamic simulation of cage induction machine with air gap eccentricity," IEEE Proceedings-Electric Power Applications, vol. 152, no. 4, pp. 803-811, 2005.
- [6] Akbari, S. Sadeghi, and A. H. Isfahani, "calculation of inductances of induction machines under axial non-uniformity conditions," Elec. Eng., vol. 60, no. 3, pp. 149-154, 2009.
- [7] C. Di, X. Bao, H. Wang, Q. Lv, and Y. He, "Modeling and Analysis of Unbalanced Magnetic Pull in Cage Induction Motors with Curved Dynamic Eccentricity," IEEE Trans. Magn., vol. 51, no. 8, pp 1-7, Aug. 2015.
- [8] H. A. Toliyat, M. S. Arefeen, and A. G. Parlos, "A method for dynamic simulation of air-gap eccentricity in induction machines," IEEE transactions on industry applications, vol. 32, no. 4, pp. 910-918, 1996.
- [9] K. Sheibani, S. Taghipour Boroujeni, and G. Arab Markede, "Analytical Modeling of Eccentric SPM Vernier Machine," Journal of Applied Electromagnetics, vol. 7, no.2, 2020. (In Persian)



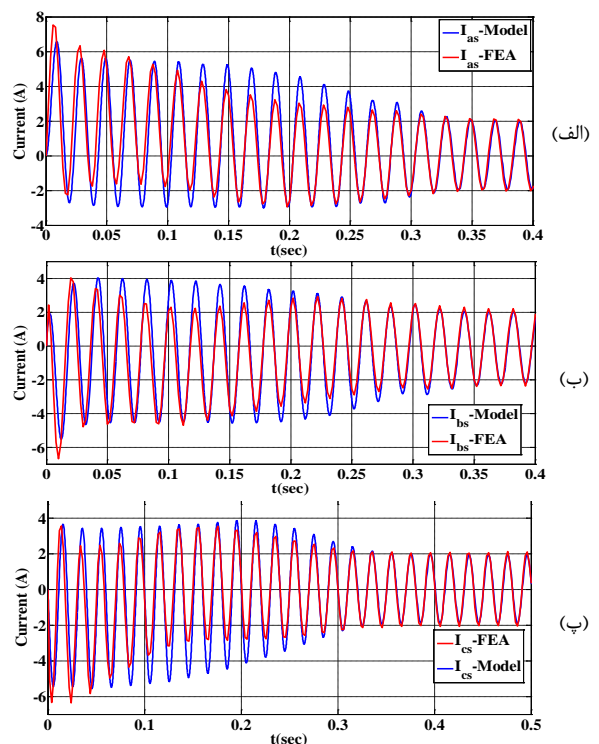
شکل (۹): گشتاور الکترومغناطیسی در راه اندازی زیر بار.

یادآوری این نکته ارزشمند است که تفاوت جزئی میان نتایج به دست آمده از مدل دینامیکی بر پایه مدارهای تزویج شده و نتایج به دست آمده از روش اجزای محدود گذرا ناشی از عوامل تاثیر گذار زیر می باشد.

۱- گام زمانی محاسبات اجزای محدود برای کاهش حجم محاسبات ۱ ms در نظر گرفته شده است. حال آن که گام زمانی محاسبات مدل دینامیکی  $250 \mu s$  است.

۲- به دلیل آن که امکان تفکیک اندوکتانس ناشی کل به دست آمده از آزمایش اتصال کوتاه و یافتن مقدار دقیق اندوکتانس های ناشی رتور و استاتور وجود ندارد، در مدل دینامیکی مقادیر اندوکتانس های ناشی برابر با یکدیگر در نظر گرفته شده است. در شرایطی که در محاسبات اجزای محدود مقادیر دقیق هر کدام لحاظ می شود.

۳- برخلاف مدل اجزای محدود، اثر شیارهای رتور و استاتور در تغییرات رلوکتانس فاصله هوایی در مدل دینامیکی لحاظ نشده و تنها به پخش جریان ها در دهانه باز شیارها بسنده شده است.



شکل (۱۰): جریان های استاتور در راه اندازی زیر بار در فازهای (الف) (ب) و (پ) c استاتور.

- [12] D. G. Dorrell and O. Kayani, "Measurement and Calculation of Unbalanced Magnetic Pull in Wound Rotor Induction Machine," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 50, no. 11, pp. 1-4, 2014.
- [13] T. A. Lipo, "Analysis of Synchronous machines," CRC Press, 2<sup>nd</sup> edition, 2012.
- [10] A. Burakov and A. Arkkio, "Comparison of the unbalanced magnetic pull mitigation by the parallel paths in the stator and rotor windings," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 43, no. 12, pp. 4083-4088, 2007.
- [11] D. G. Dorrell, "Sources and characteristics of unbalanced magnetic pull in three-phase cage induction motors with axial-varying rotor eccentricity," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 47, no. 1, pp. 12-24, Jan./Feb. 2011.