

Calculation of the resonance frequency of a toroidal plasma

G. Khojeh¹, A. Abdoli Arani^{*2}

^{*} Department of Laser and Photonics, Faculty of Physics, University of Kashan, Iran

(Received: 25/12/2020; Accepted: 15/06/2021)

Abstract

In this research, we obtain the resonance frequency of the toroid cold plasma, by calculating the related electric potential in two different states of polarization of the incident electric field. In the first case, we consider the incident electric field parallel to the axis of the torus and in the second case, we consider it perpendicular to the axis of the torus. By solving the Laplace equation and using the appropriate boundary conditions in the toroidal coordinates, we calculate the electrical potential inside and outside the torus and the resonance frequency of the toroidal plasma. Furthermore, the electrical field inside the torus is calculated. Then, we plot the resonance frequency and the amplitude of the potential in different states and for different polarizations of the electric field numerically. It is assumed that the wavelength of the incident wave is much greater than the dimensions of the cross section of the plasma torus.

Keywords: Scattering, Toroid Plasma, Electromagnetic Waves, Resonance Frequency

¹ Corresponding author E-mail: abdoliabbas@kashanu.ac.ir

علمی-پژوهشی

محاسبه بسامد تشدید یک پلاسمای چنبره‌ای

گلناز خوجه^۱، عباس عبدلی آرانی^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری، ۲- دانشیار، دانشگاه کاشان

(دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۰۵، پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۲۵)

چکیده

در این پژوهش، با محاسبه پتانسیل الکتریکی مربوط به یک پلاسمای سرد چنبره‌ای، بسامد تشدید آن را در دو حالت قطبش متفاوت میدان الکتریکی فرودی، به دست می‌آوریم. میدان الکتریکی فرودی را در حالت اول، موازی محور چنبره و در حالت دوم، عمود بر محور چنبره در نظر می‌گیریم. با حل معادله لاپلاس و استفاده از شرایط مرزی مناسب در مختصات چنبره‌ای، پتانسیل الکتریکی داخل و خارج چنبره و بسامد تشدید پلاسمای چنبره‌ای را محاسبه می‌کنیم. بعلاوه میدان الکتریکی داخل چنبره محاسبه می‌شود. سپس، بسامد تشدید و دامنه پتانسیل به دست آمده را در حالت‌های مختلف و برای قطبش‌های متفاوت میدان الکتریکی به صورت عددی رسم می‌کنیم. فرض می‌شود طول موج فرودی خیلی کوچک‌تر از ابعاد سطح مقطع چنبره پلاسمای باشد.

کلیدواژه‌ها: پراکندگی، پلاسمای چنبره‌ای، امواج الکترومغناطیس، بسامد تشدید.

۱. مقدمه

چندقطبی‌ها باعث تابش انرژی می‌شود. در حالتی که ابعاد جسم پراکننده خیلی کوچک‌تر از طول موج مربوط به موج فرودی باشد، فقط دوقطبی‌ها مهم‌تر و اثرگذارتر خواهند شد. این مسائل را می‌توان به روش مقدار مرزی تجزیه و تحلیل نمود. کاربردهای متنوع و فراوان مربوط به برهم‌کنش میدان‌های الکترومغناطیسی با پلاسمای، مانند طراحی آنتن‌های مختلف و جدید و نیز طراحی ابزارهای میکرو موج با کارایی بالا باعث شده است که، این حوزه تحقیق، مورد اهمیت قرار بگیرد. از طرف دیگر طیف پراکنده شده از پلاسمای به عوامل مختلفی مانند چگالی الکترون‌ها، دمای الکترون‌ها و یون‌ها و میدان مغناطیسی اعمال شده خارجی به پلاسمای بستگی دارد. برای دسترسی به توان تشعشع مناسب می‌توان پارامترهای پلاسمای را کنترل کرد. این موضوع در زمینه طراحی پوشش دهی اجسام پلاسمای پراکننده به منظور افزایش پراکندگی در راستایی مشخص، می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد [۱-۲]. از طرف دیگر، پلاسمای می‌تواند دارای شکل‌های مختلفی باشند مثلاً به شکل کره، استوانه و یا هر شکل دلخواه دیگری که بتواند حالت تعادل خود را حفظ کند. تحقیقات زیادی در مورد پراکندگی امواج الکترومغناطیسی از استوانه‌ها و کره‌های پلاسمایی انجام شده است و در برخی از تحقیقات بسامد تشدید پلاسمای در آن پیکربندی مشخص، محاسبه گردیده است [۱۰-۳]. به‌علاوه، می‌توان از پلاسمای به‌عنوان جایگزینی برای فلز [۱۱]

پلاسمای که به‌عنوان حالت چهارم ماده شناخته می‌شود، به‌گاز شبه خنثایی از ذرات باردار و خنثی اطلاق می‌شود که رفتار جمعی از خود نشان می‌دهند و بین ذرات آن برهم‌کنش‌های بلند برد کولنی حاکم است. یکی از معیارهای اساسی پلاسمای این است که، معادلات حاکم بر رفتار ذرات آن را معادلات الکترومغناطیسی و به‌طور مشخص، معادلات ماکسول تعیین می‌کنند. پلاسمای دارای ویژگی‌های فراوانی است، که به‌طور مثال می‌تواند در برابر پتانسیل‌ها و میدان‌های خارجی اعمال شده به آن از خود حفاظت کند و در پلاسمای میدان‌های الکترومغناطیسی خودسازگار ایجاد کند. به هر حال ویژگی‌های مختلف و متنوع پلاسمای باعث شده است که کاربردهای فراوانی در شاخه‌های مختلف علوم مهندسی و پزشکی و صنعت و کشاورزی و غیره داشته باشد. علاوه بر آن پراکندگی امواج الکترومغناطیسی توسط پلاسمای موضوع جالب و مورد علاقه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. آنچه ما در این مقاله به آن می‌پردازیم تعیین بسامد تشدید پلاسمای هنگام پراکندگی امواج الکترومغناطیسی با طول موج بلند در مقایسه با ابعاد پلاسماست که به‌واسطه آن می‌توان، نوع پلاسمای را تشخیص داد. در پراکندگی امواج الکترومغناطیسی در محیط مورد نظر، چندقطبی‌های نوسان‌کننده ایجاد می‌شوند و نوسانات این

پراکنده شده را به شدت کم می کند و لذا آشکارسازی نیاز به چشمه های لیزری پرتوان و سامانه های آشکارسازی بسیار حساسی دارد.

در این پژوهش، فرض می کنیم طول موج مربوط به موج فرودی خیلی بزرگ تر از ابعاد سطح مقطع پلاسما می باشد و بنابراین ما، پتانسیل در نقاط داخل و خارج پلاسما را محاسبه می کنیم. سپس حالتی را در نظر می گیریم که پلاسما در شرایط تشدید قرار بگیرد. در بسامد تشدید پتانسیل داخل پلاسما خیلی خیلی زیاد می شود و بنابراین تشعشع خیلی زیاد خواهد شد. در این بسامد، حداکثر کشیدگی در دو قطبی ها ایجاد می شود و حامل های بار بیشترین جداسازی را خواهند داشت و حداکثر فاصله ممکن را می گیرند و بنابراین بیشترین تشعشع ایجاد می شود. در این مدل، در واقع موجی با طول موج بلند و بسامد مشخص به پلاسما تابانده می شود که شرایط تشدید رخ دهد. بسامد تشدید در این حالت به صورت مضربی از بسامد پلاسمایی خواهد شد. با استفاده از بسامد تشدید، بسامد پلاسمایی را می توان به دست آورد و با استفاده از بسامد پلاسمایی می توان چگالی پلاسما را محاسبه نمود.

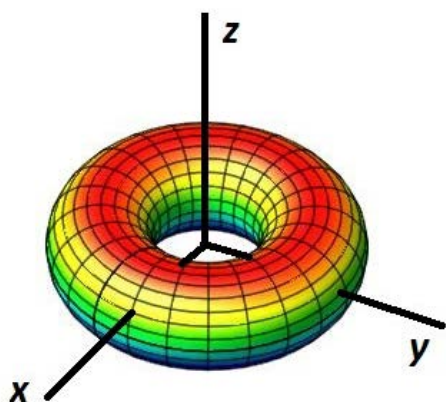
به عنوان مثال، بسامد تشدید یک ستون پلاسمایی با سطح مقطع دایره ای برابر با $\frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$ و $\varepsilon = -1$ بسامد تشدید یک کره پلاسمایی برابر با $\frac{\omega_p}{\sqrt{3}}$ و $\varepsilon = -2$ محاسبه می شوند. توجه داریم که در این حالت ها، ضریب ثابت دی الکتریک پلاسما منفی خواهد شد یعنی پلاسما در این حالت امواج را جذب یا پراکنده می کند. توجه داریم که شکل هندسی ستون پلاسمایی و کره پلاسمایی در تعیین بسامد نقش مهمی دارد و در مورد بقیه اجسام محدود مانند چنبره پلاسمایی نیز این نتیجه گیری صدق می کند. بسامد تشدید یک پلاسمای تخت برابر با بسامد پلاسمایی پلاسما و ثابت دی الکتریک برابر صفر می باشد [۱۰].

این تحقیق همراه مقدمه به عنوان بخش اول، شامل پنج بخش می باشد. در بخش دوم به طور مختصر دستگاه مختصات چنبره ای توضیح داده می شود و جواب های معادله لاپلاس در حالت کلی بیان می گردند. در بخش سوم فرض می شود میدان الکتریکی فرودی در امتداد موازی محور چنبره قرار دارد و سپس با در نظر گرفتن جواب های مناسب معادله لاپلاس و شرایط مرزی مناسب در مرز پلاسمای چنبره ای، ضرایب پتانسیل و بسامد تشدید پلاسمای چنبره ای محاسبه می شوند. سپس نمودارهای مربوط به بسامد تشدید و ضرایب پتانسیل برای حالت های مختلف ترسیم می شوند. در بخش چهارم فرض می کنیم میدان الکتریکی فرودی عمود بر محور چنبره باشد و مشابه با بخش سوم پتانسیل و بسامد تشدید پلاسمای چنبره ای

در ساختارهای مخابراتی استفاده نمود. لذا تحقیقات گسترده ای در زمینه استفاده از پلاسما در آنتن های پلاسمایی [۱۲] و موج برها [۱۳] انجام شده است. اخیراً تاثیر بسامد و شکل موج تحریک جریان متناوب بر آنتن پلاسمایی تک قطبی U شکل نیز انجام شده است [۱۴]. از طرف دیگر، پلاسما به عنوان یک محیط ناهمسانگرد در یک میدان مغناطیسی خارجی است و به طور گسترده ای در زمینه هایی مانند سامانه های راداری مدرن، سامانه های آنتن و پنهان کردن هدف، مورد توجه قرار گرفته است [۱۵-۱۸]. همچنین متذکر می شویم که تحقیقات زیادی در مورد مسائلی شامل پیکربندی چنبره ای انجام شده است؛ و نیز به روش جداسازی متغیرها، معادله لاپلاس در دستگاه مختصات چنبره ای حل شده است. در مورد چنبره رسانا واقع در میدان الکتریکی یکنواخت و نیز محاسبه پتانسیل در نقاط خارج آن تحقیق و تجزیه و تحلیل هایی صورت گرفته است [۱۹-۲۲].

لازم به ذکر است که یکی از روش ها برای اندازه گیری چگالی الکترون در محیط پلاسمای توکامک، استفاده از سامانه تداخل سنج لیزری است. اخیراً در این زمینه و برای مشخصه یابی لیزر برای استفاده در سامانه تداخل-سنج توکامک دماوند از طریق کاهش اثر منابع تولید خطا در اندازه گیری چگالی الکترون پلاسما تحقیق شده است [۲۳]. توجه داریم که اندازه گیری مشخصات پلاسما با روش های گوناگونی مانند روش های اپتیکی، بیناب سنجی، الکتریکی، مغناطیسی و پراکندگی صورت می گیرد. پراکندگی هم شامل انواع مختلفی مانند پراکندگی رایلی، پراکندگی رامان، پراکندگی کامپتون، پراکندگی بریلوئن، پراکندگی تامسون می باشد. در پراکندگی رایلی، پراکندگی توسط بارهای مقید شده و در پراکندگی تامسون، توسط بارهای آزاد صورت گیرد. آنچه اهمیت دارد این است که موج پراکنده شده اطلاعاتی شامل جنس و هندسه ماده تشکیل دهنده جسم پراکنده و غیره را در خود دارد. به هر حال، شرط پراکندگی تامسون این است که بسامد موج الکترومغناطیسی به قدری کوچک باشد که انرژی فوتون در مقایسه با انرژی سکون ذرات پراکنده کننده قابل چشم پوشی گردد. در این حالت، هنگام برخورد موج الکترومغناطیسی به الکترون های پلاسما با یک شیفت دوپلری و با طول موجی که طول موج تابش فرودی تفاوت دارد، بار دیگر گسیل می شود. موج پراکنده شده، اطلاعاتی در مورد دما و چگالی الکترون های پلاسما به همراه دارد. از مهم ترین مزایای کوچک بودن سطح مقطع پراکندگی تامسون این است که موج فرودی، پلاسما را مغشوش نمی کند و نیز، موج پراکنده شده در امتداد مسیرش به سمت بیرون پلاسما، مجدداً پراکنده می شود. همین سطح مقطع پراکندگی کوچک در پراکندگی تامسون ناهمدوس برای اندازه گیری دما و چگالی، مقدار تابش

که $Q_{n-\frac{1}{2}}^m$ و $P_{n-\frac{1}{2}}^m$ هارمونیک‌های چنبره‌ای، توابع لژاندر وابسته، هستند.



شکل (۱): مدل یک چنبره در حالت سه بعدی.

۳. محاسبه پتانسیل و بسامد تشدید پلاسمای چنبره‌ای در میدان الکتریکی فرودی موازی محور چنبره

یک پلاسمای چنبره‌ای شکل مطابق با شکل (۱) در نظر می‌گیریم. شعاع چنبره پلاسمایی برابر با R و شعاع سطح مقطع آن برابر با b فرض می‌شود. چنبره پلاسمایی را تحت تابش موج الکترومغناطیسی با طول موج خیلی بزرگ‌تر از ابعاد سطح مقطع چنبره و در راستای موازی محور چنبره یعنی در امتداد محور z در نظر می‌گیریم. یادآوری می‌کنیم اگر طول موج مربوط به موج فرودی خیلی کوچک‌تر از ابعاد سطح مقطع پلاسمای باشد، میدان الکتریکی در پلاسمای تقریباً غیر چرخشی است، $\vec{\nabla} \times \vec{E} \approx 0$ و توزیع میدان الکتریکی را می‌توان از یک پتانسیل نرده‌ای به دست آورد: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ با فرض اینکه ثابت دی‌الکتریک پلاسمای همگن فرض شود، پتانسیل الکتریکی در معادله لاپلاس: $\nabla^2\Phi = 0$ ، صدق می‌کند. چون جرم یون‌ها خیلی بیشتر از جرم الکترون‌هاست، می‌توان یون‌ها را ساکن فرض کرده و فقط حرکت الکترون‌ها در نظر گرفته شود. در این بخش قطبش میدان الکتریکی فرود آمده را در امتداد موازی محور چنبره در نظر می‌گیریم. در این صورت جواب‌های مناسب معادله لاپلاس برای پتانسیل داخل و خارج پلاسمای چنبره‌ای به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \Phi^{in} &= \sqrt{\cosh\xi - \cos\eta} \sum_{n=1}^{\infty} A Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh\xi) \sin(n\eta) \end{aligned} \quad (۸)$$

$$\begin{aligned} \Phi^{out} &= -E_0 z \\ &+ \sqrt{\cosh\xi - \cos\eta} \sum_{n=1}^{\infty} B P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh\xi) \sin(n\eta) \end{aligned} \quad (۹)$$

را در این حالت محاسبه می‌کنیم. نمودارهای مربوط به بسامد تشدید و ضرایب پتانسیل برای حالت‌های مختلف در این مورد نیز ترسیم می‌گردند. در بخش پنجم یک نتیجه‌گیری کلی از تحقیق انجام‌شده در این پژوهش ارائه می‌شود.

۲. جواب معادله لاپلاس در دستگاه مختصات چنبره

معادلات تبدیل برای مختصات چنبره‌ای به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۹]:

$$z = \frac{a \sin\eta}{\cosh\xi - \cos\eta} \quad (۱)$$

$$x = \frac{a \sinh\xi \cos\varphi}{\cosh\xi - \cos\eta} \quad (۲)$$

$$y = \frac{a \sinh\xi \sin\varphi}{\cosh\xi - \cos\eta} \quad (۳)$$

$$\text{که: } 0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \eta < 2\pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$$

در مختصات چنبره‌ای، سطح $\xi = \xi_0$ بیانگر یک چنبره است که مقطع آن دایره‌ای به شعاع $b = a \operatorname{csch}\xi_0$ است که مرکز آن به اندازه $R = a \operatorname{coth}\xi_0$ از محور z فاصله دارد. شکل (۱) مدل یک چنبره را در حالت سه بعدی نشان می‌دهد. ضرایب مقیاس در این مختصات به صورت

$$h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\cosh\xi - \cos\eta} \quad (۴)$$

$$h_\varphi = \frac{a \sinh\xi}{\cosh\xi - \cos\eta} \quad (۵)$$

نوشته می‌شوند [۱۹]؛ بنابراین معادله لاپلاس $\nabla^2\Phi = 0$ در مختصات چنبره‌ای به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{h_\xi^2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(h_\xi \sinh\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_\eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{h_\xi}{\sinh^2\xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right] = 0 \quad (۶)$$

در حالت کلی، جواب معادله لاپلاس در مختصات چنبره‌ای به روش جداسازی متغیرها محاسبه می‌شود. شکل کلی جواب معادله لاپلاس در این مختصات به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta, \varphi) &= \sqrt{\cosh\xi - \cos\eta} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi)] [c_n \cos(n\eta) + d_n \sin(n\eta)] [D_{mn} P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh\xi) + E_{mn} Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh\xi)] \end{aligned} \quad (۷)$$

$$T_2 = Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh\xi_0) \left[\cosh\xi_0 Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh\xi_0) + \sinh^2\xi_0 [Q_{k-\frac{1}{2}}^{1'}(\cosh\xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh\xi_0) + Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi_0) P_{n-\frac{1}{2}}^{1'}(\cosh\xi_0)] \right] \quad (18)$$

پس از محاسبه پتانسیل الکتریکی به سادگی می توانیم، مؤلفه های میدان الکتریکی داخل پلاسما ی چنبره ای را به صورت زیر محاسبه نماییم:

$$E_\xi^{in} = -\frac{1}{a}(\cosh\xi - \cos\eta) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A\alpha_k \cos(k\eta) \sin(n\eta) \times \left[\cosh\xi Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) Q_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) + \sinh^2\xi [Q_{k-\frac{1}{2}}^{1'}(\cosh\xi) Q_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) + Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) Q_{n-\frac{1}{2}}^{1'}(\cosh\xi)] \right] \quad (19)$$

$$E_\eta^{in} = \frac{1}{a}(\cosh\xi - \cos\eta) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A \sinh\xi Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) Q_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) [k \sin(k\eta) \sin(n\eta) - n \cos(k\eta) \cos(n\eta)] \quad (20)$$

در واقع، فرض می کنیم طول موج مربوط به موج فرودی خیلی بزرگ تر از ابعاد سطح مقطع پلاسما می باشد و بنابراین ما، پتانسیل در نقاط داخل و خارج پلاسما را محاسبه می کنیم. سپس حالتی را در نظر می گیریم که پلاسما در شرایط تشدید قرار بگیرد. در بسامد تشدید پتانسیل داخل پلاسما خیلی خیلی زیاد می شود و بنابراین تشعشع خیلی زیاد خواهد شد. در این بسامد، حداکثر کشیدگی در دو قطبی ها ایجاد می شود و حامل های بار بیشترین جداسازی را خواهند داشت و حداکثر فاصله ممکن را می گیرند و بنابراین بیشترین تشعشع ایجاد می شود. با توجه به شکل هندسی ستون پلاسمایی با مقطع دایره ای و کره پلاسمایی بسامد تشدید آنها در این شرایط به ترتیب برابر با: $\frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$ و $\frac{\omega_p}{\sqrt{3}}$ محاسبه می شوند [۱۰].

در صورتی میدان الکتریکی داخل پلاسما بزرگ و قابل ملاحظه خواهد شد و حالت تشدید در پلاسما اتفاق خواهد افتاد که: $\omega_p T_1 - T_2 = 0$ باشد. با اعمال این شرط، بسامد تشدید چنبره پلاسمایی از رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\omega_R = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-\Delta}} \quad (21)$$

برای محاسبات بعدی، می توانیم پتانسیل های داخل و خارج چنبره پلاسمایی را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$\Phi^{in} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A\alpha_k \sinh\xi Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) Q_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) \sin(k\eta) \sin(n\eta) \quad (10)$$

$$\Phi^{out} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B\alpha_k \sinh\xi Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh\xi) \sin(k\eta) \sin(n\eta) - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \alpha_k \sinh\xi Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) Q_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) \sin(k\eta) \sin(n\eta) \quad (11)$$

توجه داریم که، مقادیر ثابت های ذکر شده در عبارت های پتانسیل با استفاده از شرایط مرزی در سطح پلاسما محاسبه می شوند. مؤلفه مماسی میدان و مؤلفه عمودی بردار جابه جایی الکتریکی در سطح چنبره پلاسما پیوسته هستند [۱۰]:

$$\epsilon_p \frac{\partial \Phi^{in}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} = \frac{\partial \Phi^{out}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \quad (12)$$

$$\Phi^{in} \Big|_{\xi=\xi_0} = \Phi^{out} \Big|_{\xi=\xi_0} \quad (13)$$

که در رابطه بالا

$$\epsilon_p = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (14)$$

به عنوان ثابت گذردهی پلاسمای سرد تعریف می شود و ω_p بسامد پلاسمایی می باشد. با اعمال شرایط مرزی و انجام یک سری محاسبات، می توانیم ضرایب مجهول را به صورت زیر به دست آوریم:

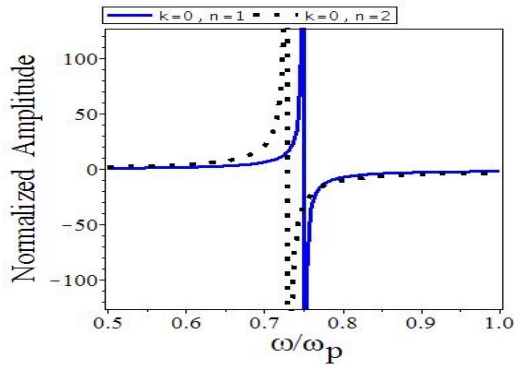
$$A = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E_0 a n \frac{T_2 - T_1}{\epsilon_p T_1 - T_2} \quad (15)$$

$$B = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E_0 a n \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi_0)}{P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh\xi_0)} \frac{T_1(\epsilon_p - 1)}{\epsilon_p T_1 - T_2} \quad (16)$$

که در معادلات (۱۵ و ۱۶)، کمیت های T_1 و T_2 به صورت زیر معرفی می شوند:

$$T_1 = P_{n-\frac{1}{2}}(\cosh\xi_0) \left[\cosh\xi_0 Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi_0) + \sinh^2\xi_0 [Q_{k-\frac{1}{2}}^{1'}(\cosh\xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi_0) + Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi_0) Q_{n-\frac{1}{2}}^{1'}(\cosh\xi_0)] \right] \quad (17)$$

محور چنبره پلاسمایی می باشد. در شکل (۵) دامنه بهنجار شده پتانسیل داخل چنبره پلاسمایی برحسب نسبت بسامد موج تابشی به بسامد پلاسمایی و $\frac{R}{b}$ برای حالتی که میدان الکتریکی فرودی موازی محور چنبره پلاسمای باشد رسم شده است.



شکل (۴): دامنه بهنجار شده پتانسیل داخل چنبره پلاسمایی برحسب نسبت بسامد موج تابشی به بسامد پلاسمایی برای حالتی که میدان الکتریکی فرودی موازی محور چنبره پلاسمایی باشد.

۴. محاسبه پتانسیل و بسامد تشدید پلاسمای چنبره‌ای در میدان الکتریکی فرودی عمود بر محور چنبره

در این بخش میدان الکتریکی فرودی را در امتداد عمود بر محور چنبره و در امتداد محور X در نظر می‌گیریم. بنابراین پتانسیل الکتریکی مناسب در داخل و خارج پلاسمای چنبره‌ای به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\Phi^{in} = \sqrt{\cosh\xi - \cos\eta \sum_{n=0}^{\infty} A Q_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) \cos(n\eta) \cos\varphi} \quad (22)$$

$$\Phi^{out} = -E_0 x + \sqrt{\cosh\xi - \cos\eta \sum_{n=0}^{\infty} B P_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) \cos(n\eta) \cos\varphi} \quad (23)$$

همچنین، می‌توانیم پتانسیل‌ها را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$\Phi^{in} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A \alpha_k \sinh\xi Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) Q_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) \cos(k\eta) \cos(n\eta) \cos\varphi \quad (24)$$

$$\Phi^{out} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B \alpha_k \sinh\xi Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) P_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) \cos(n\eta) \cos\varphi$$

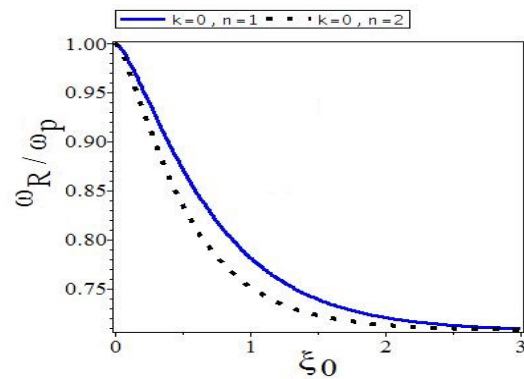
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \alpha_k \sinh^2 \xi Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh\xi) \quad (25)$$

$$Q'_{n-\frac{1}{2}}(\cosh\xi) \cos(k\eta) \cos(n\eta) \cos\varphi$$

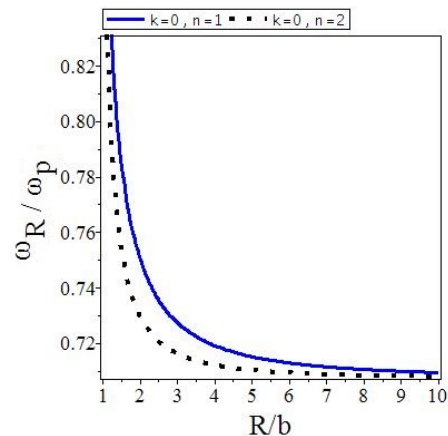
اکنون، با اعمال شرایط مرزی مشابه با بخش قبلی می‌توانیم

این حقیقت که بسامد تشدید چنبره پلاسمایی در $\Delta = \frac{T_2}{T_1}$ اتفاق می‌افتد به علت هندسه چنبره پلاسمایی می‌باشد. تشدید در پلاسمای باعث می‌شود که الکترون‌های پلاسمای شروع به نوسان کنند و باعث تشعشع یا پراکنده شدن میدان در پلاسمای گردند. در شرایط تشدید دامنه نوسان الکترون‌ها در پلاسمای به بیشینه مقدار خود خواهد رسید و لذا توان پراکنده‌گی امواج به بیشترین مقدار خود می‌رسد. در نتیجه در حالت تشدید، دامنه تشعشع دوقطبی‌ها بیشینه می‌شود و یک موج پراکنده‌شده با دامنه بسیار زیاد ایجاد می‌شود.

در شکل‌های (۲ و ۳) نسبت بسامد تشدید پلاسمای به بسامد پلاسمایی برحسب ابعاد پلاسمای چنبره‌ای و برای حالت‌های مختلف ترسیم شده است.



شکل (۲): نمودار نسبت بسامد تشدید به بسامد پلاسمایی بر حسب ξ_0 در یک پلاسمای چنبره‌ای برای حالتی که میدان الکتریکی فرودی موازی محور چنبره پلاسمای باشد.



شکل (۳): نمودار نسبت بسامد تشدید به بسامد پلاسمایی بر حسب $\frac{R}{b}$ در یک پلاسمای چنبره‌ای برای حالتی که میدان الکتریکی فرودی موازی محور چنبره پلاسمای باشد

در شکل (۴) دامنه بهنجار شده پتانسیل داخل چنبره پلاسمایی، را برحسب نسبت بسامد موج تابشی به بسامد پلاسمایی در حالت‌های مختلف ترسیم نموده‌ایم. بدیهی است این شکل‌ها برای حالتی است که میدان الکتریکی فرودی موازی

$$E_{\eta}^{in} = \frac{1}{a} (\cosh \xi - \cos \eta) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A \sinh \xi Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh \xi) Q_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh \xi)$$

$$\cos \varphi [k \sin(k\eta) \cos(n\eta) + n \cos(k\eta) \sin(n\eta)] \quad (۳۲)$$

$$E_{\varphi}^{in} = \frac{1}{a} (\cosh \xi - \cos \eta) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A \alpha_k Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh \xi) Q_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh \xi)$$

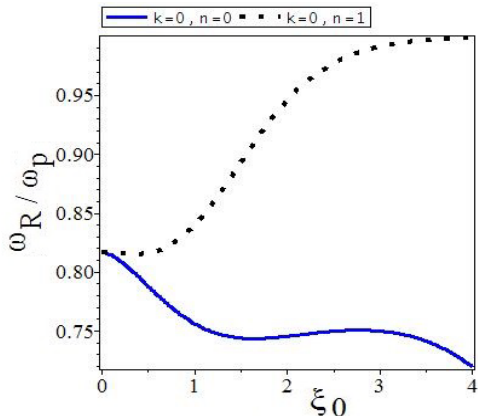
$$\cos(k\eta) \cos(n\eta) \sin \varphi \quad (۳۳)$$

بنابراین بسامد تشدید چنبره پلاسمایی با در نظر گرفتن میدان تابشی عمود بر محور چنبره پلاسمایی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\omega_R = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-\Delta}} \quad (۳۴)$$

$$\Delta = \frac{T_2}{T_1}$$

در شکل های (۶) و (۷) نسبت بسامد تشدید پلاسمای به بسامد پلاسمایی بر حسب ابعاد چنبره پلاسمایی برای حالت های مختلف ترسیم شده است. در شکل (۸) دامنه بهنجار شده پتانسیل داخل چنبره پلاسمایی را بر حسب نسبت بسامد تابشی به بسامد پلاسمایی در حالت های مختلف ترسیم نموده ایم. بدیهی است این شکل ها برای حالتی است که میدان الکتریکی فرودی عمود بر محور چنبره پلاسمایی می باشد. در شکل (۹) دامنه بهنجار شده پتانسیل داخل چنبره پلاسمایی، بر حسب نسبت بسامد موج تابشی به بسامد پلاسمایی و $\frac{R}{b}$ برای حالتی که میدان الکتریکی فرودی عمود بر محور چنبره پلاسمایی باشد رسم شده است.



شکل (۶): نمودار نسبت بسامد تشدید به بسامد پلاسمایی بر حسب ξ_0 در یک پلاسمای چنبره ای برای حالتی که میدان الکتریکی فرودی عمود بر محور چنبره پلاسمای باشد.

ضرایب پتانسیل را به صورت زیر محاسبه نماییم:

$$A = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E_0 a \varepsilon_n \frac{Q'_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) T_3 - \frac{Q'_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)}{Q^1_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)} \sinh \xi_0 T_2}{\varepsilon_p T_1 - T_2} \quad (۲۶)$$

$$B = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E_0 a \varepsilon_n \frac{Q^1_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) T_3 - \frac{Q'_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)}{Q^1_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)} \sinh \xi_0 \varepsilon_p T_1}{P^1_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) \varepsilon_p T_1 - T_2} \quad (۲۷)$$

که ضرایب T_1 و T_2 و T_3 به صورت زیر تعریف می شوند:

$$T_1 = P^1_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) \left[\cosh \xi_0 Q^1_{k-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q^1_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) + \sinh^2 \xi_0 [Q^{1'}_{k-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q^1_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) + Q^1_{k-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q^{1'}_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)] \right] \quad (۲۸)$$

$$T_2 = Q^1_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) \left[\cosh \xi_0 Q^1_{k-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) P^1_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) + \sinh^2 \xi_0 [Q^{1'}_{k-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) P^1_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) + Q^1_{k-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) P^{1'}_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)] \right] \quad (۲۹)$$

$$T_3 = \sinh \xi_0 P^1_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) \left[2 \cosh \xi_0 Q^1_{k-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q'_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) + \sinh^2 \xi_0 [Q^{1'}_{k-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q'_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) + Q^1_{k-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0) Q''_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi_0)] \right] \quad (۳۰)$$

همچنین، مؤلفه های میدان الکتریکی داخل پلاسمای چنبره ای را می توانیم به صورت زیر محاسبه نماییم:

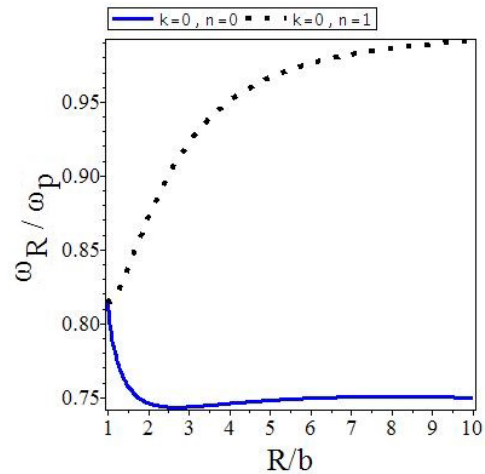
$$E_{\xi}^{in} = -\frac{1}{a} (\cosh \xi - \cos \eta) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A \alpha_k \cos(k\eta) \cos(n\eta) \cos \varphi \times \left[\cosh \xi Q^1_{k-\frac{1}{2}}(\cosh \xi) Q^1_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi) + \sinh^2 \xi [Q^{1'}_{k-\frac{1}{2}}(\cosh \xi) Q^1_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi) + Q^1_{k-\frac{1}{2}}(\cosh \xi) Q^{1'}_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \xi)] \right] \quad (۳۱)$$

۵. نتیجه‌گیری

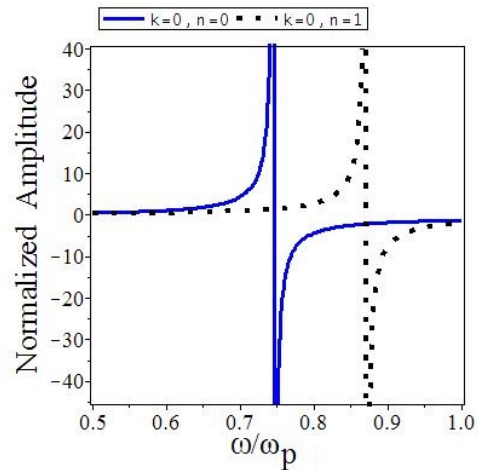
در این پژوهش، ما به بررسی و تحلیل مسئله پراکندگی از یک چنبره پلاسمایی که تحت تابش امواج الکترومغناطیسی با طول موج بلند نسبت به ابعاد سطح مقطع چنبره قرار گرفته پرداخته‌ایم. دو حالت برای قطبش میدان الکتریکی فرودی در نظر گرفته‌ایم در حالت اول فرض کرده‌ایم میدان الکتریکی فرودی موازی محور چنبره پلاسمایی باشد و در حالت دوم فرض نموده‌ایم که میدان الکتریکی فرودی عمود بر محور چنبره پلاسمایی باشد. با حل معادله لاپلاس در مختصات چنبره‌ای و اعمال شرایط مرزی مناسب روی مرز چنبره پلاسمایی، پتانسیل داخل و خارج چنبره پلاسمایی را با در نظر گرفتن تقریب مذکور محاسبه کرده‌ایم. سپس شرط تشدید یک پلاسمای چنبره‌ای را در دو حالت ذکر شده به دست آورده‌ایم و بسامد تشدید را برای دو حالت محاسبه کرده‌ایم. نمودارهای بسامد تشدید و دامنه پتانسیل را برای حالت‌های مختلف و نیز در دو حالت که میدان الکتریکی فرودی موازی و عمود بر محور چنبره پلاسمایی باشد، ترسیم نموده‌ایم. در واقع در این کار انجام شده، ما با محاسبه بسامد تشدید مربوط به پراکندگی از یک چنبره پلاسمایی روشی را ارائه کردیم که به کمک آن می‌توانیم چگالی پلاسمای چنبره‌ای را محاسبه کنیم؛ یعنی روشی برای تشخیص پلاسمای چنبره‌ای ارائه نموده‌ایم.

۶. مراجع

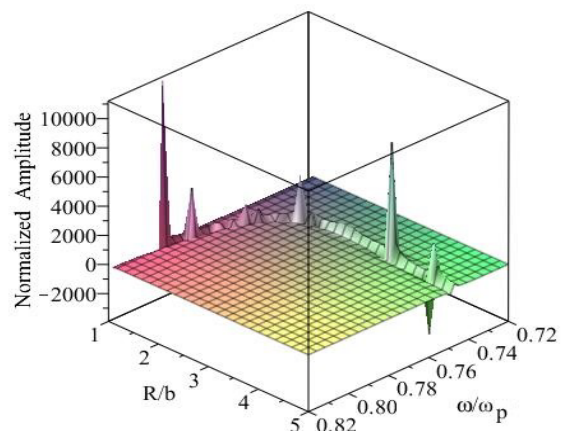
- [1] R. J. Vidmar, "On the use of atmospheric pressure plasmas as electromagnetic reflectors and Absorbers," IEEE Trans. Plasma Sci., vol. 18, pp. 733-741, 1990.
- [2] W. W. Destler, J. E. Degrange, H. H. Fleischmann, J. Rodgers, and Z. Segalov, "Experimental studies of high-power microwave reflection, transmission, and absorption from a plasma-covered plane conducting boundary," J. Appl. Phys., vol. 69, pp. 6313-6318, 1991.
- [3] Y.-L. Geng, X.-B. Wu, L.-W. Li and B.-R. Guan, "Electromagnetic scattering by an inhomogeneous plasma anisotropic sphere of multilayers," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 53, pp. 3982-3989, 2005.
- [4] A. Helaly, E. A. Soliman, and A. A. Megahed, "Electromagnetic wave scattering by nonuniform plasma sphere," Can. J. Phys., vol. 75, p. 919932, 1997.
- [5] Y.-L. Geng, "Scattering of a plane wave by an anisotropic plasma-coated conducting sphere," Int. J. Antennas Propagat., Article ID 409764, 2011.
- [6] Y. L. Geng, X. Wu, and L.-W. Li, "Analysis of electromagnetic scattering by a plasma anisotropic sphere," Radio Sci., vol. 38, pp. 1104-1112, 2003.
- [7] Y. Zhong-Cai and S. Jia-Ming, "Collisional, nonuniform plasma sphere scattering calculation by FDTD employing a Drude model," Int. J. Infrared Millimeter Waves, vol. 28, pp. 987-992, 2007.



شکل (۷): نمودار نسبت بسامد تشدید به بسامد پلاسمایی بر حسب $\frac{R}{b}$ در یک پلاسمای چنبره‌ای برای حالتی که میدان الکتریکی فرودی عمود بر محور چنبره پلاسمایی باشد.



شکل (۸): دامنه پهنجار شده پتانسیل داخل چنبره پلاسمایی بر حسب نسبت بسامد موج تابشی به بسامد پلاسمایی برای حالتی که میدان الکتریکی فرودی عمود بر محور چنبره پلاسمایی باشد.



شکل (۹): دامنه پهنجار شده پتانسیل داخل چنبره پلاسمایی بر حسب نسبت بسامد موج تابشی به بسامد پلاسمایی و $\frac{R}{b}$ برای حالتی که میدان الکتریکی فرودی عمود بر محور چنبره پلاسمایی باشد.

- [17] S. B. Liu, J. J. Mo, and N. C. Yuan, "Research on the absorption of EM-waves by inhomogeneous magnetized plasmas," *Acta Electronica Sinica*, vol. 31, pp. 372–375, 2003. (In Chinese)
- [18] D. J. Gregolre, J. Santoru, and R. W. Schumacher, "Electromagnetic wave propagation in unmagnetized plasmas," Accession No. ADA250710, Air Force Office of Scientific Research Boiling Air force Base, Washington, DC, p. 710, 1992.
- [19] P. M. Morse and H. Feshbach, "Methods of Theoretical Physics," vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [20] M. Andrews, "Alternative separation of Laplace's equation in toroidal coordinates and its application to electrostatics," *Journal of Electrostatics*, vol. 64, pp. 664–672, 2006.
- [21] R. Scharstein and Howard B. Wilson, "Electrostatic Excitation of a Conducting Toroid: Exact Solution and Thin-Wire Approximation, *Electromagnetics*," vol. 25, pp. 1–19, 2005.
- [22] J. Selvaggi, Sh. Salon, and M. V. K. Chari, "An application of toroidal functions in electrostatics," *Am. J. Phys.*, vol. 75, p. 724, 2007.
- [23] N. Nabipour and M. Karimi, "Determination of Damavand Tokamak Laser Interferometer System Characteristics by Means of Identifying and Evaluating the Sources of Error in Plasma Electron Density Measurement," *Journal of Applied Electromagnetics*, vol. 7, pp. 109–119, 2019. (In Persian)
- [8] Y. Li, M. Wang, Q. Dong, and G. Tang, "Anisotropic scattering for a magnetized cold plasma sphere", *Energy Power Eng.*, vol. 2, pp. 122–126, 2010.
- [9] A. Abdoli-Arani, R. Ramezani-Arani, B. Jazi, and S. Golharani, "Scattering from an elliptical cylindrical plasma for electromagnetic waves with wavelength much greater than the dimensions of the plasma cross section," *Waves Random Complex Media*, vol. 22, no. 3, pp. 370–382, 2012.
- [10] N. A. Krall and A.W. Trivelpiece, "Principles of Plasma Physics," McGraw-Hill, New York, 1973.
- [11] T. J. Dwyer, J. R. Greig, D. P. Murphy, J. M. Perin, R. E. Pechacek, and M. Raileigh, "On the Feasibility of using an Atmospheric Discharge Plasma as an RF Antenna," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 32, pp. 141–146, 1984.
- [12] H. Ja'afar, M. T. Ali, H. M. Zali, and N. A. Halili, "Analysis and Design between Plasma Antenna and Monopole Antenna," *IEEE International Symposium on Telecommunication Technologies (ISTT 2012)*, Kuala Lumpur, Malaysia, 27-28 November 2012.
- [13] T. Anderson, "Plasma Antennas," Artech House-1 edition, 2011.
- [14] M. Tohidlo, S. M. Hashemi, and F. Sadeghikia, "The Effect of Frequency and Waveform of AC Excitation on U-Shaped Monopole Plasma Antenna," *Journal of Radar*, vol. 7, pp. 89-95, 2019. (In Persian)
- [15] W. Ren and L.Q. Xiao, "Analysis of electromagnetic scattering by a plasma-coated conducting sphere using simplified wave functions," *J. Hangzhou Dianzi University*, vol. 28, pp. 1–6, 2008. (In Chinese)
- [16] Y. Chang, W. F. Chen, and N. Luo, "Analysis of the spatial scattering characteristic for the reentry target cloaked by plasma based on the physical optics method," *J. Microwaves*, vol. 24, pp. 2–6, 2008. (In Chinese)