

---

**The effect of a strong uniform axial magnetic field on the TE and TM modes fields and the injected electron dynamics in a plasma waveguide with Piet Hein cross section**

**M. B. Abrahimi, A. Abdoli Arani\***

\* Associate Professor, Department of Laser and Photonics, Faculty of Physics, Kashan University, Kashan, Iran

(Received: 01/09/2021; Accepted: 19/01/2022)

**Abstract**

*In this paper, considering the effect of a strong uniform axial magnetic field on the plasma dielectric tensor, the electromagnetic fields and other outcomes in a metal waveguide whose cross-section is in the shape of a Piet Hein curve and contains cold and strongly magnetized plasma, are investigated with an appropriate approximation. First, the Pitt Hein waveguide is introduced and the electromagnetic wave equation in this type of waveguide is presented as two separate differential equations, by the method of separating variables with a suitable approximation. The electric and magnetic fields as well as the dispersion relations for the TM and TE modes are then calculated in a Piet Hein waveguide with a metal wall containing strongly magnetized cold plasma, and the dispersion relations and resulting fields are plotted. Next, the motion of an injected electron into this waveguide and the effect of a strong uniformly axial magnetic field on the electron energy is investigated. The electron motion and energy equations are written in the Pitt Hein plasma waveguide in the presence of a strong uniform axial magnetic field and are solved using the fourth-order Runge Kutta method for TM and TE modes. Finally, the motion path and kinetic energy of the electrons injected into the waveguide are graphically investigated for both modes.*

**Keywords:** Piet Hein Plasma Waveguide, Electromagnetic Waves, Dispersion Relation, Electron Acceleration.

---

\* Corresponding author E-mail: Abdoliabbas@kashanu.ac.ir

## تأثیر میدان مغناطیسی محوری یکنواخت قوی بر میدان مدهای TE و TM و حرکت الکترون تزریق شده در موجبری حاوی پلاسما با سطح مقطع پیت هاین

محمدبهنام آبرحیمی<sup>۱</sup>، عباس عبدلی آرائی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکترا، ۲- دانشیار، گروه لیزر و فوتونیک، دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

(دریافت: ۱۴۰۰/۰۸/۲۲، پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۱۹)

### چکیده

در این مقاله، با در نظر گرفتن تأثیر میدان مغناطیسی محوری یکنواخت قوی در تانسور گذردهی الکتریکی پلاسما، میدان‌های الکترومغناطیسی و نتایج دیگری در یک موجبر با دیواره فلزی و با سطح مقطعی به شکل منحنی پیت هاین که حاوی پلاسما سرد و به شدت مغناطیده است، با استفاده از یک تقریب مناسب تحقیق و بررسی می‌شوند. در ابتدا با معرفی موجبر پیت هاین، معادله موج الکترومغناطیسی در این نوع موجبر، با استفاده از یک تقریب مناسب و به روش جداسازی متغیرها، به صورت دو معادله دیفرانسیلی مجزا، ارائه می‌شود. سپس میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و همچنین معادله پاشندگی برای مدهای TE و TM در یک موجبر پیت هاین با دیواره فلزی که حاوی پلاسما سرد به شدت مغناطیده است محاسبه و معادلات پاشندگی و میدان‌های به دست آمده ترسیم می‌شوند. در ادامه حرکت یک الکترون تزریق شده به داخل این موجبر و تأثیر میدان مغناطیسی محوری یکنواخت قوی بر انرژی الکترون بررسی می‌شود. معادلات حرکت و انرژی الکترون در موجبر پلاسمایی پیت هاین و در حضور میدان مغناطیسی محوری یکنواخت قوی نوشته می‌شوند و با استفاده از روش رانگ کوتای مرتبه چهار برای مدهای TE و TM حل می‌گردد. مسیر حرکت و انرژی جنبشی الکترون تزریق شده به موجبر برای هر دو مد به صورت گرافیکی مورد تحقیق قرار گرفته‌اند.

### کلیدواژه‌ها: موجبر پلاسمایی پیت هاین، امواج الکترومغناطیس، رابطه پاشندگی، شتاب الکترون

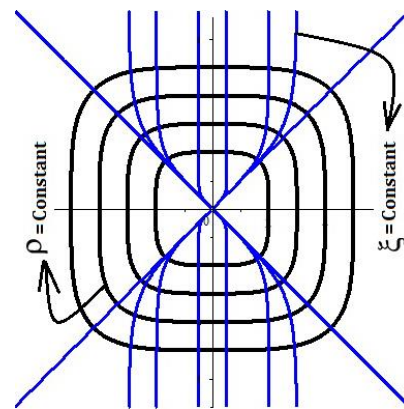
#### ۱- مقدمه

چین خورده بر مبنای اصول نوسانگر موج برگشتی برای بازه مخابراتی در گستره تراهرتز برای کار در وردسپهر مورد بررسی و تحقیق قرار گرفته است [۱۶]. همچنین یک مبدل مدی طراحی و ساخته شده است که مد TEM را به مد TE<sub>11</sub> تبدیل کرده و سپس توسط یک موجبر دهانه باز تشعشع می‌کند [۱۷]. از طرف دیگر، پلاسما می‌تواند برای تحمل میدان‌های الکتریکی بسیار بالا استفاده شود؛ بنابراین به منظور شتاب ذرات باردار، موجبرهای پلاسمایی می‌توانند مورد استفاده قرار بگیرند. واضح است که نوع سطح مقطع موجبر می‌تواند نقش مهمی در این مسیر ایفاء کند. تحقیقات زیادی توسط محققان در مورد شتاب و دینامیک ذرات باردار در موجبرهای با سطح مقطع مستطیلی، مثلثی، دایره‌ای و بیضی انجام شده است [۳۳-۱۸]. باید توجه داشت که موجبر پیت هاین در زمینه‌های اپتیکی مورد مطالعه قرار گرفته است، اما ایده اصلی و جدید کار ما استفاده از این نوع موجبرهای حاوی پلاسما و در محدوده ماکروویو است. در این مقاله، موجبر با دیواره فلزی پیت هاین در نظر گرفته شده است که حاوی پلاسما سرد به شدت مغناطیده است. معادلات اساسی و معادله موج برای این ساختار ارائه شده‌اند و حل آن‌ها با یک تقریب مشخص بیان شده است. رابطه پاشندگی و معادلات میدان‌های الکترومغناطیسی برای مدهای TE و TM در ساختار مورد نظر

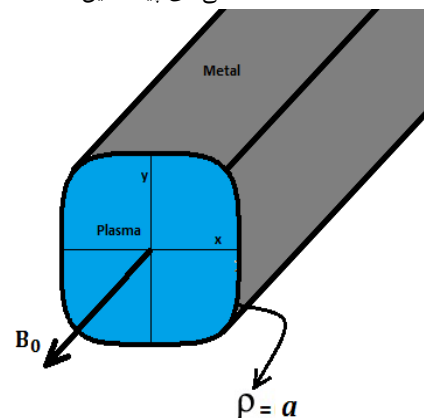
موجبرها می‌توانند سطح مقطع‌هایی با شکل‌های متفاوت مانند مستطیلی، دایره‌ای، بیضی، مثلثی، حلقوی و ... داشته باشند [۱۵-۱]. از آنجایی که موجبرهای مستطیلی و دایره‌ای در دستگاه‌های مختلف لازم هستند، تنها موجبری با سطح مقطع پیت هاین این شرایط را ارضاء می‌کند و البته نتایج جالبی ارائه می‌دهد. ویژگی خاص چنین ساختاری این است که به طور اساسی دارای ویژگی‌های موجبرهای مستطیلی و دایره‌ای و بیضی است. این موجبرها می‌توانند بسیار کارآمد باشند و دلیل آن ساختار خاص چنین موجبری است که انتظار می‌رود پدیده‌های مضر مانند پراکندگی و ... در آن‌ها رخ ندهد. این پدیده‌ها می‌توانند در موجبرهای مستطیلی با توجه به گوشه‌های تیز وجود داشته باشند که بر انتشار موج تأثیر می‌گذارد. در این زمینه، برای یک ساختار شامل موجبر اپتیکی حلقوی پیت هاین، تحلیل تئوری و منحنی‌های پراکندگی مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۱۴]. همچنین خواص پراکندگی یک موجبر نوری پیت هاین که دارای یک غلاف مارپیچ رسانا است بررسی شده است [۱۵]. طراحی تحلیلی و شبیه‌سازی یک موجبر مکعب مستطیلی

به‌دست آمده و رسم شده‌اند. همچنین در ادامه، حرکت یک الکترون که به داخل ساختار تزریق شده است مورد بررسی قرار گرفته است و به‌صورت عددی و گرافیکی تحلیل شده است. در این مقاله، مقدمه در بخش ۱ ارائه شده است. در بخش ۲، معادلات اساسی در موج‌بر پیت هاین و معادله موج در این هندسه با تقریبی مناسب، ارائه شده است. در بخش ۳، میدان‌های الکترومغناطیسی برای مُد TM و رابطه پاشندگی برای این ساختار به‌دست آمده و رسم شده است. حرکت الکترون تزریق شده به موج‌بر پیت هاین حاوی پلاسما برای مُد TM مورد بررسی و تحلیل عددی و گرافیکی قرار گرفته است. در بخش ۴، میدان‌های الکترومغناطیسی برای مُد TE و رابطه پاشندگی در این ساختار به‌دست آمده و رسم شده است. نتیجه نیز در بخش ۵ بیان شده است.

به‌دست آمده و رسم شده‌اند. همچنین در ادامه، حرکت یک الکترون که به داخل ساختار تزریق شده است مورد بررسی قرار گرفته است و به‌صورت عددی و گرافیکی تحلیل شده است. در این مقاله، مقدمه در بخش ۱ ارائه شده است. در بخش ۲، معادلات اساسی در موج‌بر پیت هاین و معادله موج در این هندسه با تقریبی مناسب، ارائه شده است. در بخش ۳، میدان‌های الکترومغناطیسی برای مُد TM و رابطه پاشندگی برای این ساختار به‌دست آمده و رسم شده است. حرکت الکترون تزریق شده به موج‌بر پیت هاین حاوی پلاسما برای مُد TM مورد بررسی و تحلیل عددی و گرافیکی قرار گرفته است. در بخش ۴، میدان‌های الکترومغناطیسی برای مُد TE و رابطه پاشندگی در این ساختار به‌دست آمده و رسم شده است. نتیجه نیز در بخش ۵ بیان شده است.



شکل (الف) هندسه منحنی‌های پیت هاین



شکل (ب) موج‌بر فلی پیت هاین

شکل (۱): هندسه و نمای موج‌بر پیت هاین

## ۲- معادلات اساسی در موج‌بر پیت هاین

منحنی پیت هاین یک حالت خاصی از منحنی‌هایی است که در حالت کلی با معادله زیر نشان داده می‌شوند:

$$\left(\frac{x}{a_0}\right)^n + \left(\frac{y}{b_0}\right)^n = 1 \quad (1)$$

$$x^4 + y^4 = a^4 \quad (2)$$

مختصات مناسب  $(\rho, \xi, z)$  را برای مطالعه هندسه سطح مقطع مورد نظر معرفی می‌شود. همچنین در حالت کلی منحنی‌های پیت هاین متناسب با  $a_0 = b_0 = \rho$  را به‌صورت

$$x^4 + y^4 = \rho^4 \quad (3)$$

و منحنی‌های عمود بر آن‌ها را به شکل

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\xi^2} \quad (4)$$

معرفی می‌شود.

بنابراین، ثابت  $\rho$  منحنی‌های پیت هاین را نمایش می‌دهد. شکل (۱) منحنی‌های ثابت  $\rho$  و ثابت  $\xi$  را برای مقادیر مختلف  $\rho$  و  $\xi$  نمایش می‌دهند. به علاوه در این هندسه، ضرایب مقیاس  $h_\rho, h_\xi$  و  $h_z$  با روابط زیر بیان می‌شوند:

$$h_\rho = \frac{\rho^3}{\sqrt{A[\xi^2 + \rho^2 - \xi^2\sqrt{\xi^2 + \rho^2}]}} \quad (5)$$

$$h_\xi = \frac{\sqrt{\xi^2 + \rho^2} - \xi^2}{\sqrt{A(\xi^2 + \rho^2)}} \quad (6)$$

$$h_z = 1 \quad (7)$$

و پارامتر  $A$  به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \sqrt{[\sqrt{\xi^2 + \rho^2} + \xi^2]^2 - 4\xi^4} \quad (8)$$

با استفاده از معادلات ماکسول، معادله موج الکترومغناطیسی در غیاب میدان مغناطیسی یکنواخت در موج‌بر پیت هاین با معادله هلمهولتز زیر نشان داده می‌شود:

$$[\nabla^2 + K_{E,B}^2] \begin{pmatrix} E_z(\rho, \xi, z) \\ B_z(\rho, \xi, z) \end{pmatrix} = 0 \quad (9)$$

در اینجا فرض می‌شود که:  $E_z = E_z(\rho, \xi)e^{i(\omega t - \beta z)}$  و  $B_z = B_z(\rho, \xi)e^{i(\omega t - \beta z)}$  و با استفاده از تعریف عملگر لاپلاسی و

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \quad g = -\frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \quad \varepsilon_{\parallel} \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{aligned} \quad (16)$$

که در اینجا  $\omega_p = (n_0 e^2 / m \varepsilon_0)^{1/2}$  و  $\omega_c = eB_0 / m$  به ترتیب فرکانس الکترونی پلاسما و فرکانس سیکلوترونی هستند. در این مبحث فرض می‌شود که پلاسما در حضور یک میدان مغناطیسی یکنواخت محوری قوی قرار گرفته است. بنابراین در این حالت، تانسوری دی‌الکتریک پلاسما در حضور میدان مغناطیسی محوری قوی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (17)$$

با استفاده از معادلات ماکسول و جایگذاری تانسور گذردهی الکتریکی پلاسما می‌توان معادله موج الکترومغناطیسی در این پیکربندی را به صورت زیر به دست آورد:

$$[\nabla_T^2 + (\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - \beta^2) \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}] E_z(\rho, \xi) = 0 \quad (18)$$

حال موج‌بر پیت هاین حاوی پلاسما سرد به شدت مغناطیده و با مرز  $\rho = a$  را تحت تابش موج الکترومغناطیسی با جهت انتشار z برای تحریک مد TM در نظر گرفته می‌شود.

با استفاده از معادلات ماکسول و شرط مرزی  $E_z|_{\rho=a} = 0$  ریب در نظر گرفته شده در بخش ۲،  $\xi \ll \rho$  و معادلات (۱۳-۱۴)، مؤلفه‌های میدان الکترومغناطیسی را برای مُد TM به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_z = A \frac{1}{\rho} J_1(k\rho) G(\xi) e^{i(\omega t - \beta z + \delta)} \quad (19)$$

$$E_{\rho} = -\frac{i\beta}{h_{\rho} \left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - \beta^2 \right)} \times \quad (20)$$

$$A \left[ -\frac{1}{\rho^2} J_1(k\rho) \frac{1}{\rho} J_1'(k\rho) \right] G(\xi) e^{i(\omega t - \beta z + \delta)}$$

$$E_{\xi} = -\frac{i\beta}{h_{\xi} \left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - \beta^2 \right)} A \left[ \frac{1}{\rho} J_1(k\rho) \right] G'(\xi) e^{i(\omega t - \beta z + \delta)} \quad (21)$$

$$B_{\rho} = \frac{i\omega \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_{\perp}}{h_{\xi} \left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - \beta^2 \right)} A \left[ \frac{1}{\rho} J_1(k\rho) \right] G'(\xi) e^{i(\omega t - \beta z + \delta)} \quad (22)$$

$$B_{\xi} = -\frac{i\omega \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_{\perp}}{h_{\rho} \left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - \beta^2 \right)} A \left[ -\frac{1}{\rho^2} J_1(k\rho) \frac{1}{\rho} J_1'(k\rho) \right] G(\xi) e^{i(\omega t - \beta z + \delta)} \quad (23)$$

$$k = \sqrt{2 \left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - \beta^2 \right) \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} \quad (24)$$

با جایگزینی ضرایب مقیاس در این هندسه معادله موج بر حسب متغیرهای  $(\rho, \xi)$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} &\frac{3A\sqrt{\xi^4 + \rho^4}}{\rho^7} \left[ \sqrt{\xi^4 + \rho^4} - \xi^2 \right] \frac{\partial E_z(B_z)}{\partial \rho} + \\ &\frac{A\xi^2}{\rho^6} \left[ \sqrt{\xi^4 + \rho^4} - \xi^2 \right] \frac{\partial^2 E_z(B_z)}{\partial \rho^2} + \\ &\frac{3A\xi}{\left[ \sqrt{\xi^4 + \rho^4} - \xi^2 \right]} \frac{\partial E_z(B_z)}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{A\sqrt{\xi^4 + \rho^4}}{\left[ \sqrt{\xi^4 + \rho^4} - \xi^2 \right]} \frac{\partial^2 E_z(B_z)}{\partial \xi^2} + \\ &K_{E,B}^2 E_z(B_z)_z = 0 \end{aligned}$$

با اعمال تقریب  $\xi \ll \rho$  و با استفاده از فن جداسازی متغیرها و با در نظر گرفتن  $E_z(B_z) = F(\rho)G(\xi)$ ، معادله بالا به دو معادله دیفرانسیل مجزای زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\rho^6}{\sqrt{2} F(\rho)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 F(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{3\rho^5}{\sqrt{2} F(\rho)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho} + K_{E,B}^2 F(\rho) = \alpha \quad (11)$$

$$4\sqrt{2}\xi^6 \frac{1}{G(\xi)} \frac{\partial^2 G(\xi)}{\partial \xi^2} + 12\sqrt{2}\xi^5 \frac{1}{G(\xi)} \frac{\partial G(\xi)}{\partial \xi} = -\alpha \quad (12)$$

که در آن‌ها،  $\alpha$  ضریب جداسازی است. در اینجا ساده‌ترین جواب با  $\alpha = 0$  را در نظر گرفته می‌شود. با این فرض، دو معادله دیفرانسیل به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{\partial^2 F(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho} + \sqrt{2} K_{E,B}^2 F(\rho) = 0 \quad (13)$$

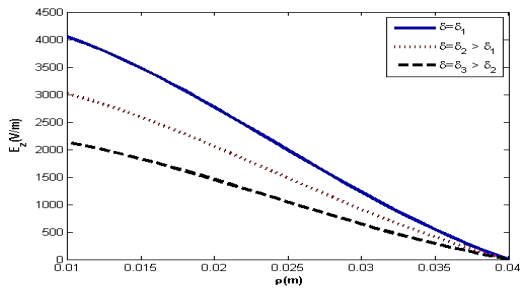
$$\frac{\partial^2 G(\xi)}{\partial \xi^2} + \frac{3}{\xi} \frac{\partial G(\xi)}{\partial \xi} = 0 \quad (14)$$

جواب‌های معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (۱۳)، توابع بسل مرتبه اول هستند و معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (۱۴) دو جواب دارد. اولین جواب برابر با مقداری ثابت و دومین جواب تابعی از  $\xi$  است.

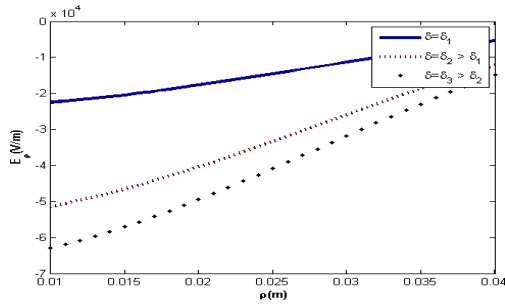
### ۳- میدان‌های الکترومغناطیسی در موج‌بر پیت هاین حاوی پلاسما در حضور میدان مغناطیسی قوی یکنواخت محوری برای مُد TM

با فرض اینکه پلاسما در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت محوری قرار گیرد، تانسور گذردهی الکتریکی پلاسما مغناطیده به صورت زیر بیان می‌شود:

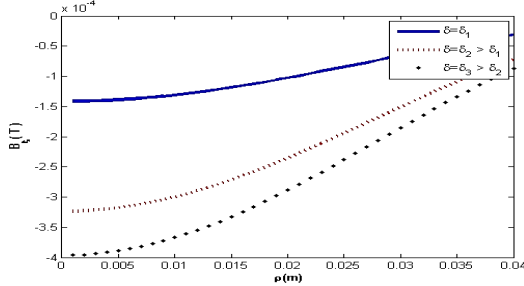
$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (15)$$



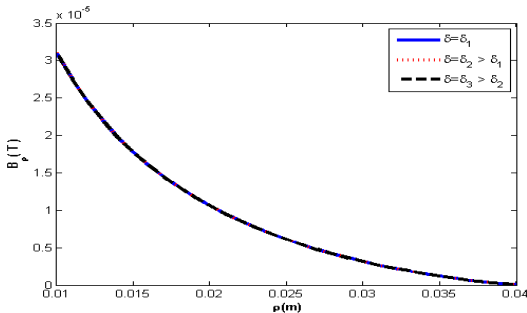
(الف) نمودار  $B_z$  بر حسب  $\rho$



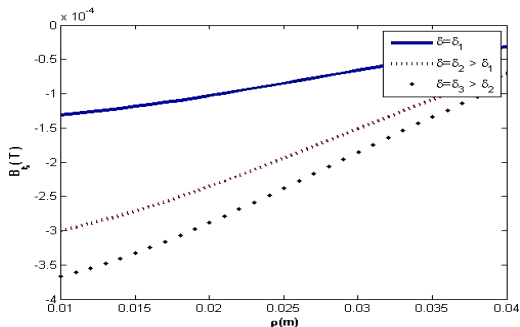
(ب) نمودار  $E_\rho$  بر حسب  $\rho$



(ج) نمودار  $E_\xi$  بر حسب  $\rho$



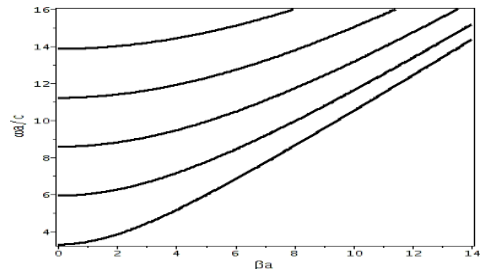
(د) نمودار  $B_\rho$  بر حسب  $\rho$



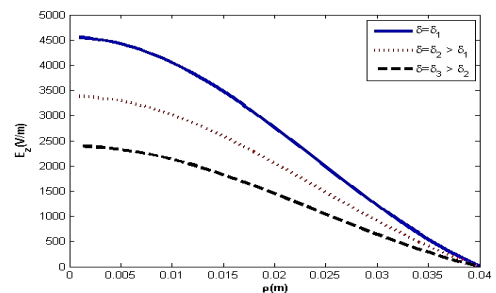
(ه) نمودار  $B_\xi$  بر حسب  $\rho$

شکل (۴): میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مُد TM در موج بر پلاسمایی پیت هاین بر حسب  $\rho$  و مقدار ثابت  $\xi$  برای دومین جواب معادله (۱۴)

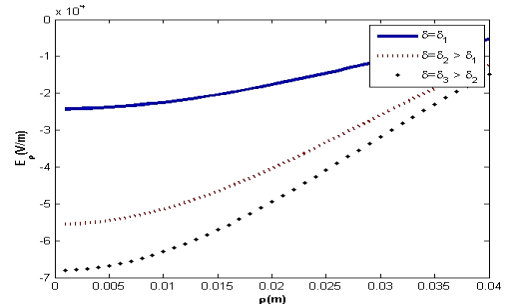
$\beta$  عدد موج است و پارامتر  $k$  به صورت زیر تعریف می‌شود:



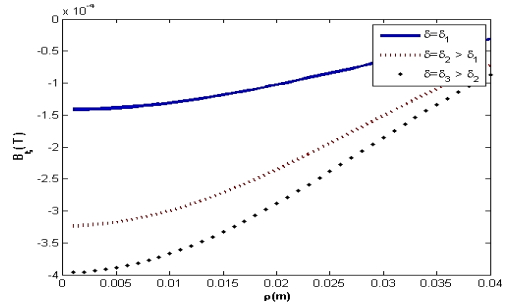
شکل (۲): نمودار مربوط به رابطه پاشندگی امواج الکترومغناطیسی مفروض برای مُد TM در موج بر پلاسمایی پیت هاین



(الف) نمودار  $E_z$  بر حسب  $\rho$



(ب) نمودار  $E_\rho$  بر حسب  $\rho$



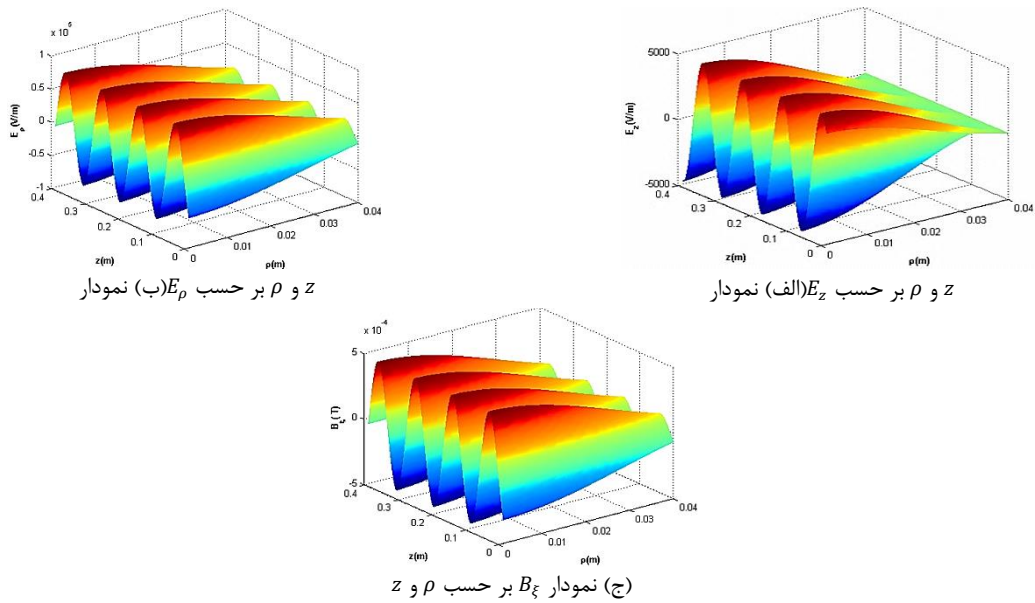
(ج) نمودار  $B_\xi$  بر حسب  $\rho$

شکل (۳): میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مُد TM در موج بر پلاسمایی پیت هاین بر حسب  $\rho$  و مقدار ثابت  $\xi$  برای اولین جواب معادله (۱۴)

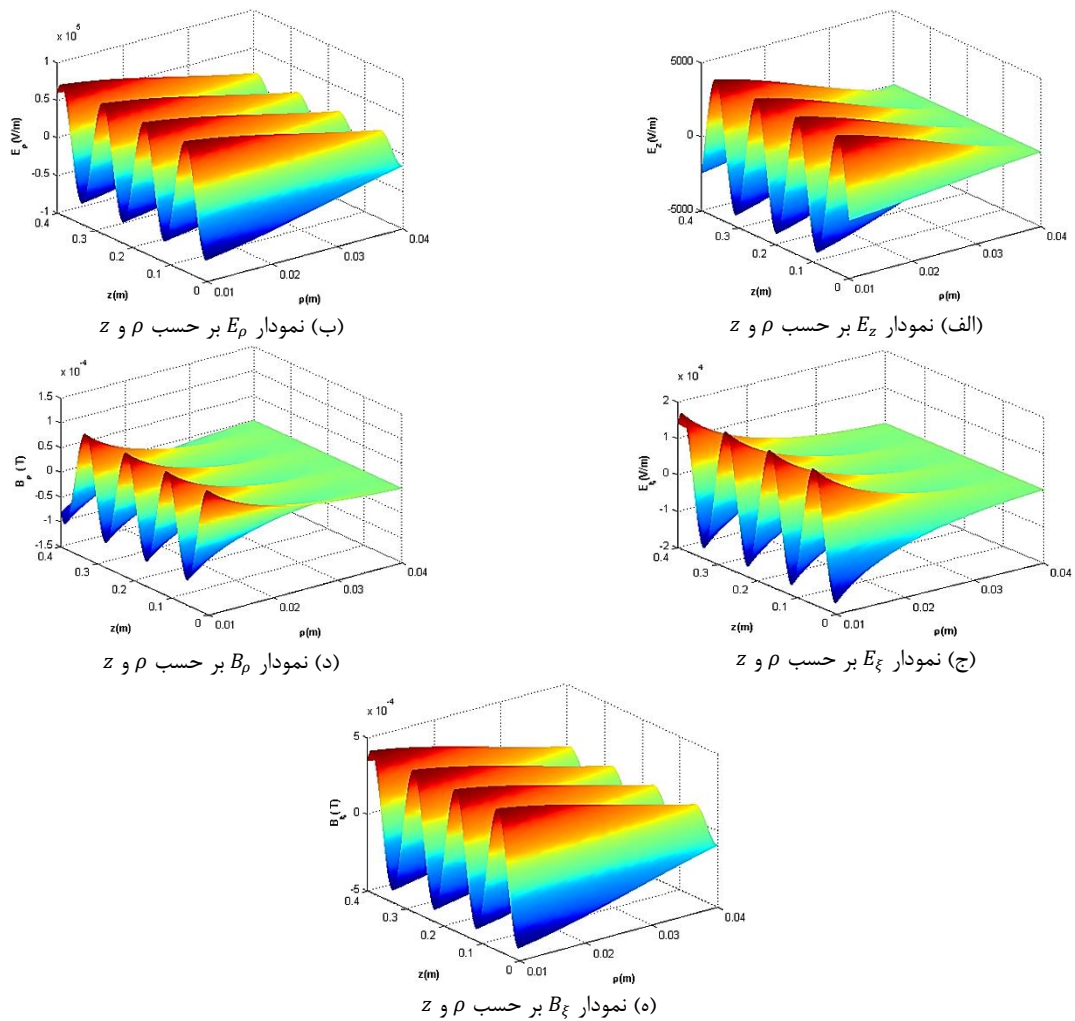
رابطه پاشندگی در موج بر پلاسمایی پیت هاین از طریق اعمال شرط مرزی در مرز  $\rho = a$  به دست می‌آید.

با اعمال شرط مرزی، معادله پاشندگی با رابطه  $J_1(ka) = 0$  محاسبه می‌شود.

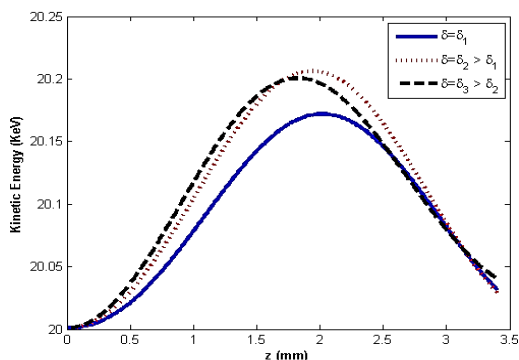
نمودار رابطه پاشندگی مربوط به این امواج در شکل (۳) رسم شده است. شکل‌های (۴-۶) مؤلفه‌های میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی برای مُد TM مفروض را نشان می‌دهند.



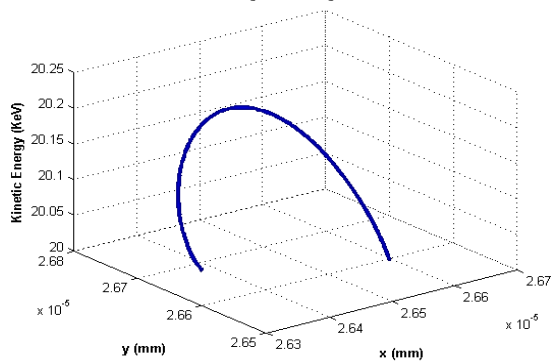
شکل (۵): میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی برای مُد TM در موج‌بر پلاسمایی پیت هاین بر حسب  $\rho$  و  $z$ ، برای اولین جواب معادله (۱۴)



شکل (۶): میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی برای مُد TM در موج‌بر پلاسمایی پیت هاین به‌صورت تابعی از  $\rho$  و  $z$ ، برای دومین جواب معادله (۱۴)

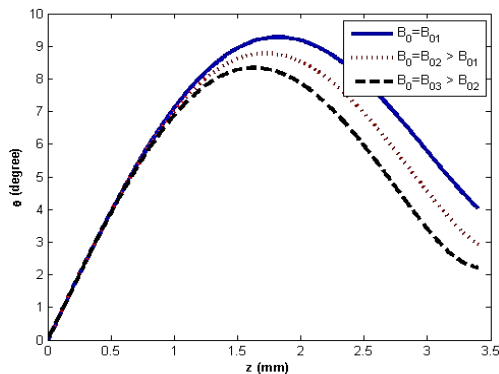


الف) برای مقادیر مختلف  $\delta$

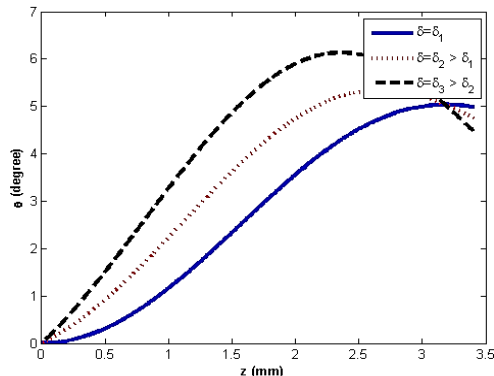


ب) انرژی جنبشی در صفحه  $x, y$

شکل (۸): تغییرات انرژی جنبشی الکترون در موج پلاسما پیت های برای مد TM مفروض



الف) برای مقادیر متفاوت  $B_0$



ب) برای مقادیر متفاوت  $\delta$

شکل (۹): تغییرات زاویه  $\theta$  بر حسب  $z$  در موج پلاسما پیت های برای مد TM مفروض

### ۳-۱- حرکت الکترون در موج پیت های حاوی پلاسما به شدت مغناطیسه برای مد TM

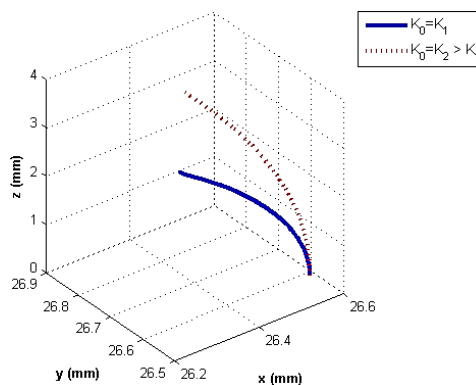
در این قسمت حرکت الکترون تزریق شده به داخل یک موج پیت های با دیواره فلزی حاوی پلاسما به شدت مغناطیسه برای مد TM را بررسی خواهد شد و تأثیر میدان مغناطیسی یکنواخت محوری قوی را روی انرژی جنبشی الکترون تحقیق می‌شود. به این منظور فرض می‌شود که یک الکترون با انرژی مشخص به داخل موج پیت های مفروض تزریق می‌شود و تحت میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مد TM مورد نظر شتاب می‌گیرد. تغییرات انرژی و مسیر حرکت الکترون را در موج پیت مورد نظر مطالعه می‌شود. بنابراین معادلات لورنتس و انرژی را برای الکترون در موج پیت به کار برده می‌شود. برای بررسی رفتار الکترون در داخل این موج پیت، معادلات زیر را با روش عددی رنگ کوتای مرتبه چهارم حل می‌شود. معادلات لورنتس و انرژی برای الکترون در مختصات دکارتی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{d(\gamma m_e v_x)}{dt} = -e[E_x + v_y B_z + v_y B_0 - v_z B_y] \quad (25)$$

$$\frac{d(\gamma m_e v_z)}{dt} = -e[E_z + v_x B_z + v_x B_0 - v_y B_x] \quad (26)$$

$$\frac{d(\gamma m_e c^2)}{dt} = -e(v_x E_x + v_y E_y + v_z E_z) \quad (27)$$

در اینجا برای بررسی حرکت الکترون جواب اول معادله (۱۴) را در نظر گرفته می‌شود.



شکل (۷): مسیر حرکت الکترون در موج پیت های برای مد TM مفروض

در شکل (۷)، مسیر سه بعدی حرکت الکترون را در موج پیت مورد نظر ترسیم شده است. شکل (۸)، تغییرات انرژی جنبشی در موج پیت های حاوی پلاسما را نشان می‌دهد. شکل (۹) زاویه  $\theta = \arctan \sqrt{p_x^2 + p_y^2} / p_z$  را در موج پیت های حاوی پلاسما به شدت مغناطیسه برای مد TM مفروض نشان می‌دهد.

$$B_{\xi} = -\frac{i\beta\mu_0}{h_{\xi}\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp} - \beta^2\right)} A \left[\frac{1}{\rho} J_1(k\rho)\right] G'(\xi) e^{i(\omega t - \beta z + \delta)} \quad (33)$$

$$B_z = A\mu_0 \frac{1}{\rho} J_1(k\rho) G(\xi) e^{i(\omega t - \beta z + \delta)} \quad (34)$$

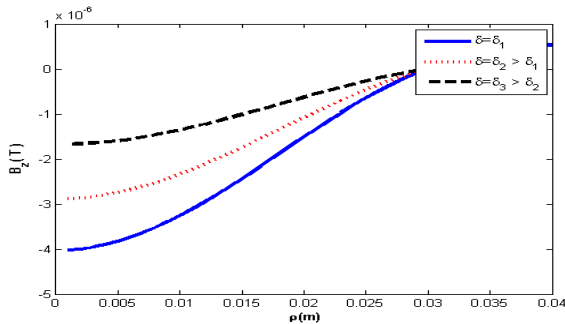
به طوری که

$$k = \sqrt{2\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \beta^2\right)} \quad (35)$$

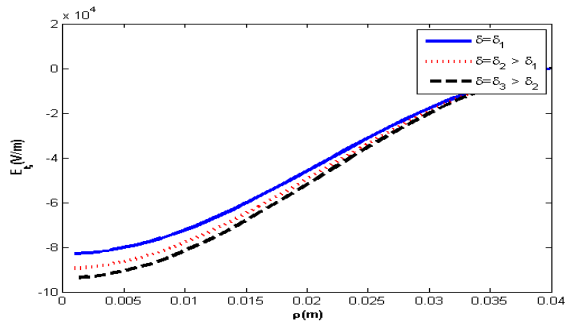
با اعمال شرط مرزی،  $E_{\xi}|_{\rho=a} = 0$ ، معادله پاشندگی در این حالت به صورت زیر محاسبه می شود:

$$-J_1(ka) + aJ'_1(ka) = 0 \quad (36)$$

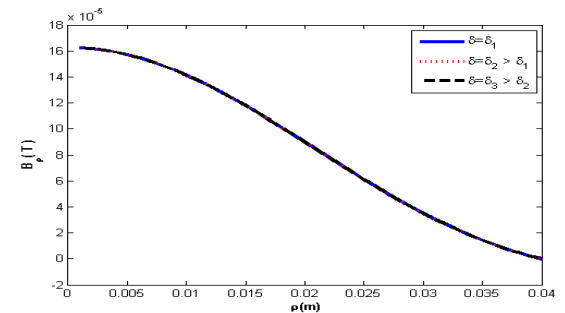
رابطه پاشندگی مربوط به این امواج را در شکل (۱۰) ترسیم شده است. شکل های (۱۱-۱۴) تغییرات مؤلفه های میدان های الکتریکی و مغناطیسی را برای حالت TE مفروض نشان می دهد.



شکل (الف) نمودار  $B_z$  بر حسب  $\rho$  و  $z$

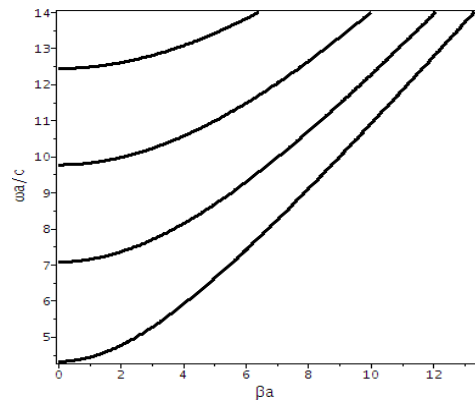


شکل (ب) نمودار  $B_{\rho}$  بر حسب  $\rho$  و  $z$



شکل (ج) نمودار  $E_{\xi}$  بر حسب  $\rho$  و  $z$

شکل (۱۱): میدان های الکتریکی و مغناطیسی برای مُد TE در موج بر پلاسمایی پیت هاین به صورت تابعی از  $\rho$  و  $z$  برای اولین جواب معادله (۱۴)



شکل (۱۰): نمودار مربوط به رابطه پاشندگی امواج الکترومغناطیسی مفروض مُد TE مورد نظر در موج بر پلاسمایی پیت هاین

#### ۴- میدان های الکترومغناطیسی در موج بر پیت هاین حاوی پلاسمای در حضور میدان مغناطیسی قوی یکنواخت محوری برای مُد TE

در این بخش نیز مشابه با بخش قبل، با استفاده از معادلات ماکسول و جایگذاری تانسور گذردهی الکتریکی پلاسمای می توان معادله موج الکترومغناطیسی در این پیکربندی را به صورت زیر به دست آورد:

$$\left[\nabla_T^2 + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp} - \beta^2\right)\right] B_z(\rho, \xi) = 0 \quad (29)$$

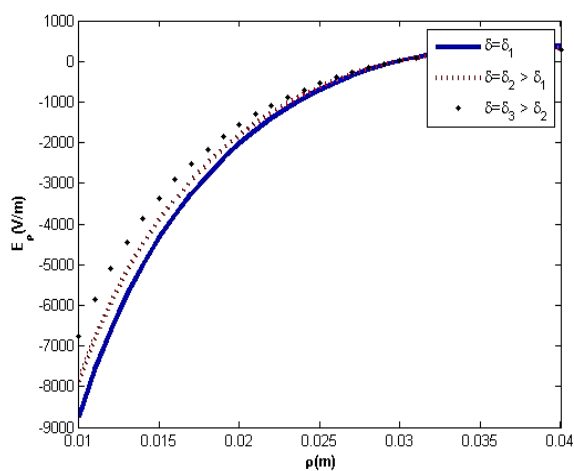
مشابه بخش ۳، ما یک موج بر پیت هاین حاوی پلاسمای سرد به شده مغناطیسه با مرز پیت هاین  $\rho=a$  و یک تابش الکترومغناطیسی برای تحریک مُد TE را در نظر گرفته می شود. از معادلات ماکسول، شرط مرزی  $E_{\xi}|_{\rho=a} = 0$  تقریب در نظر گرفته شده در بخش ۳،  $\rho \ll \xi$  و معادله های (۱۳ و ۱۴) استفاده می شود و سپس مؤلفه های میدان های الکتریکی و مغناطیسی برای مُد TE به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$E_{\rho} = -\frac{i\omega\mu_0}{h_{\xi}\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp} - \beta^2\right)} A \left[\frac{1}{\rho} J_1(k\rho)\right] G'(\xi) e^{i(\omega t - \beta z + \delta)} \quad (30)$$

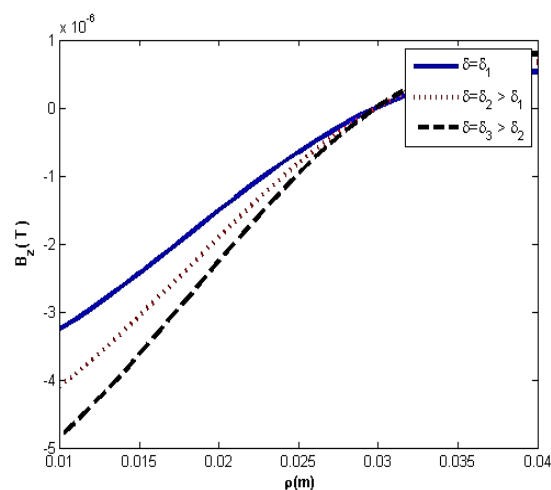
$$E_{\xi} = \frac{i\omega\mu_0}{h_{\rho}\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp} - \beta^2\right)} A \left[-\frac{1}{\rho^2} J_1(k\rho) \frac{1}{\rho} J'_1(k\rho)\right] G(\xi) e^{i(\omega t - \beta z + \delta)} \quad (31)$$

$$B_{\rho} = -\frac{i\beta\mu_0}{h_{\rho}\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp} - \beta^2\right)} A \left[-\frac{1}{\rho^2} J_1(k\rho) \frac{1}{\rho} J'_1(k\rho)\right] G(\xi) e^{i(\omega t - \beta z + \delta)} \quad (32)$$

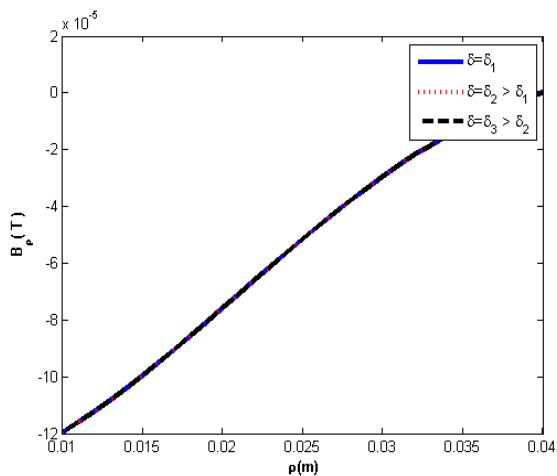




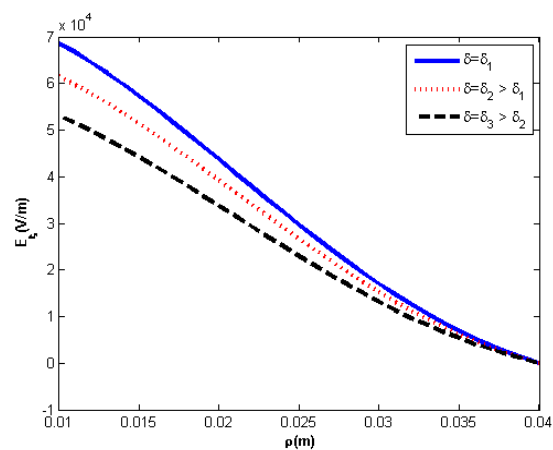
(ب) نمودار  $E_\rho$  بر حسب  $\rho$



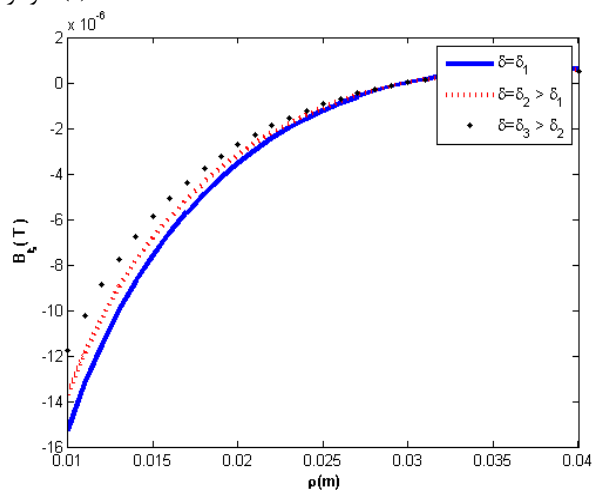
(الف) نمودار  $B_z$  بر حسب  $\rho$



(د) نمودار  $B_\rho$  بر حسب  $\rho$

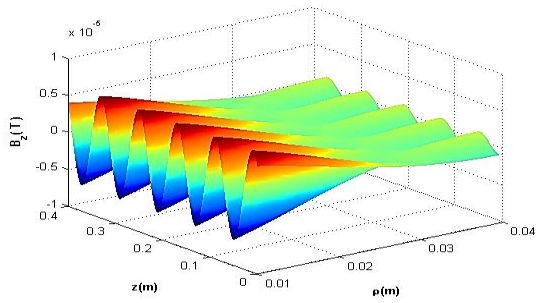


(ج) نمودار  $E_z$  بر حسب  $\rho$

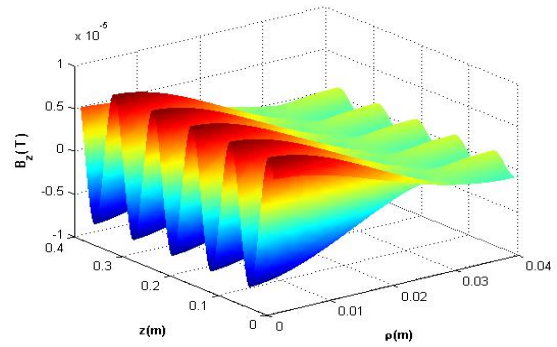


(ه) نمودار  $B_z$  بر حسب  $\rho$

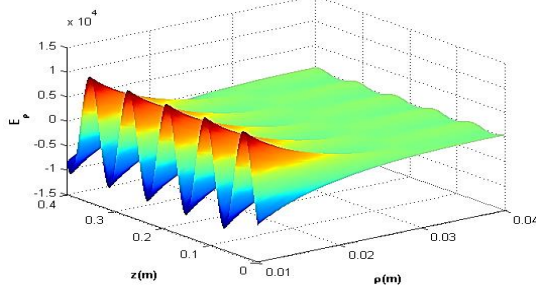
شکل (۱۲): میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی برای مُد TE در موج‌بر پلاسمایی پیت هاین بر حسب  $\rho$  برای دومین جواب معادله (۱۴)



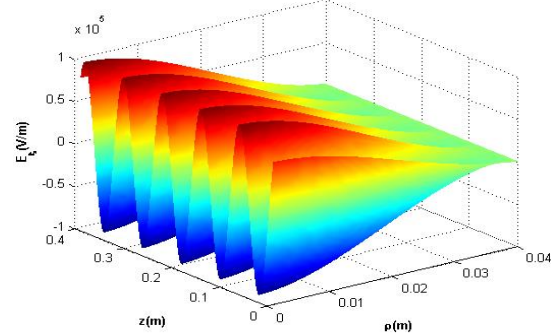
(الف) نمودار  $B_z$  بر حسب  $\rho$  و  $z$



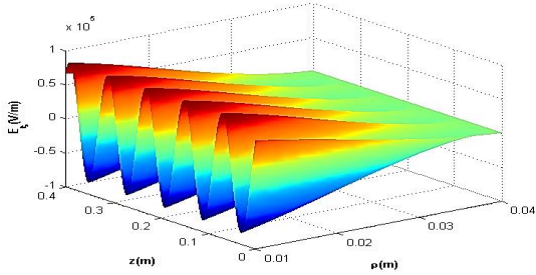
(الف) نمودار  $B_z$  بر حسب  $\rho$



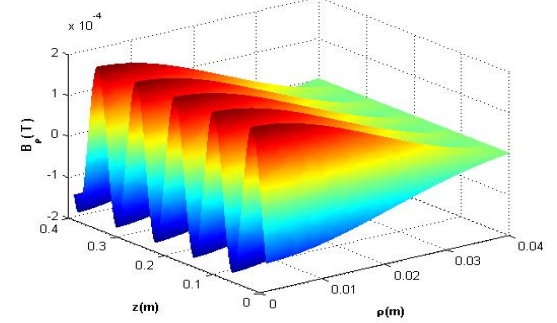
(ب) نمودار  $E_\rho$  بر حسب  $\rho$  و  $z$



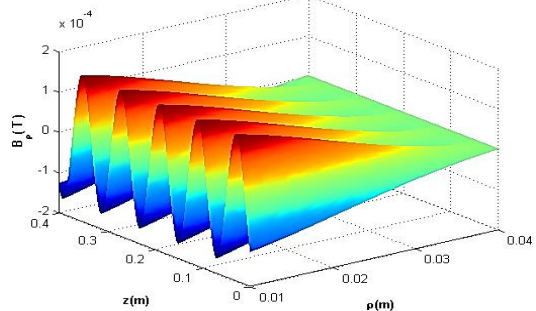
(ب) نمودار  $E_\rho$  بر حسب  $\rho$



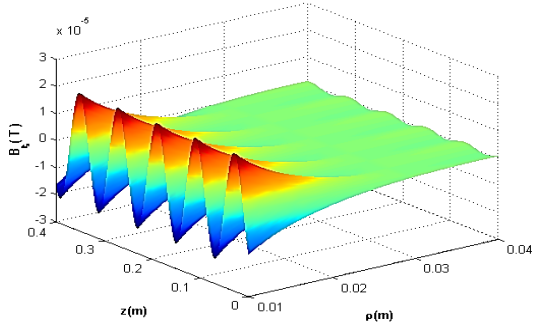
(ج) نمودار  $E_\xi$  بر حسب  $\rho$  و  $z$



(ج) نمودار  $B_\rho$  بر حسب  $\rho$



(د) نمودار  $B_\rho$  بر حسب  $\rho$  و  $z$



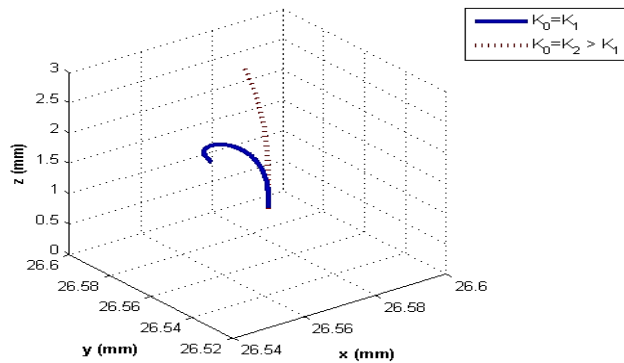
(ه) نمودار  $B_\xi$  بر حسب  $\rho$  و  $z$

شکل (۱۴): میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی برای مُد TE در موج‌بر پلاسمایی پیت هاین بر حسب  $\rho$  و  $z$  برای دومین جواب معادله (۱۴)

شکل (۱۳): میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی برای مُد TE در موج‌بر پلاسمایی پیت هاین بر حسب  $\rho$  برای دومین جواب معادله (۱۴)

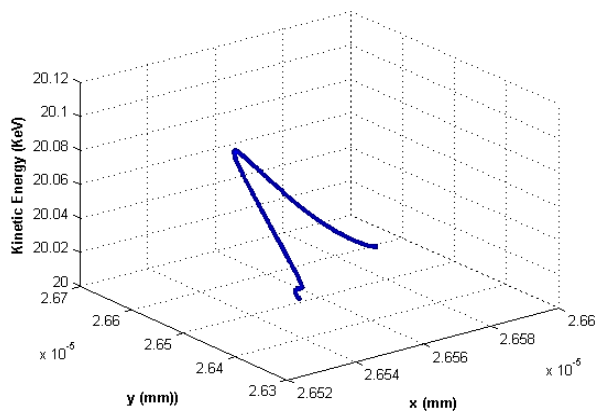
#### ۴-۱- حرکت الکترون در موج‌بر پیت هاین حاوی پلازما برای مُد TE

مشابه بخش ۳-۱، ما حرکت الکترون خارجی تیزریقی به داخل موج‌بر فلزی پیت هاین حاوی پلاسمای سرد در حضور یک میدان مغناطیسی قوی محوری یکنواخت که تحت میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مُد TE شتاب می‌گیرد، بررسی می‌شود. در این حالت نیز اولین جواب معادله (۱۴) انتخاب می‌شود. در شکل (۱۵)، مسیر سه بعدی حرکت الکترون را در موج‌بر مورد نظر ترسیم شده است. شکل (۱۶)، تغییرات انرژی جنبشی در موج‌بر پیت هاین پلاسمایی را نشان می‌دهد. شکل (۱۷) زاویه  $\theta = \arctan \sqrt{p_x^2 + p_y^2} / p_z$  در موج‌بر پلاسمایی پیت هاین برای مقادیر مختلف  $\delta$  و مقادیر مختلف میدان مغناطیسی ایستای یکنواخت خارجی نشان می‌دهد.

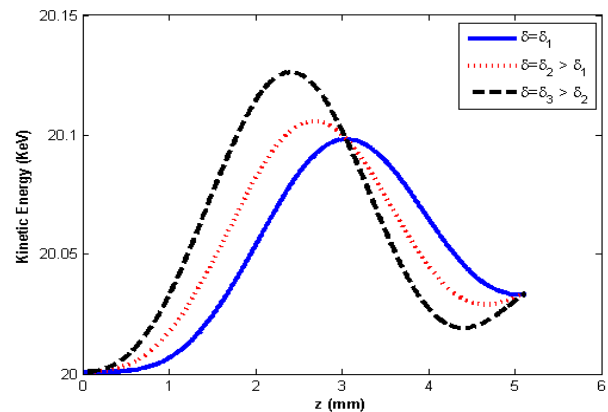


شکل (۱۵): مسیر حرکت الکترون در موجبر

پلاسمایی پیت هاین برای مُد TE مورد نظر

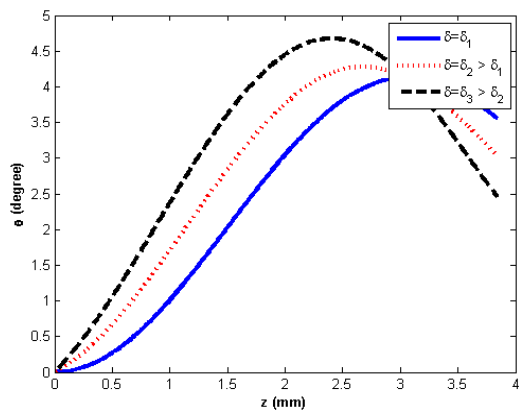


(ب) انرژی جنبشی در صفحه x.y

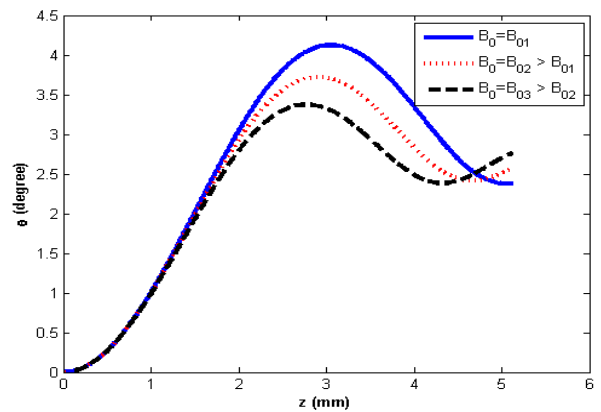


(الف) برای مقادیر مختلف  $\delta$

شکل (۱۶): تغییرات انرژی جنبشی الکترون در موجبر پلاسمایی پیت هاین برای مُد TE مورد نظر



(ب) برای مقادیر مختلف  $\delta$



(الف) برای مقادیر متفاوت  $B_0$

شکل (۱۷): تغییرات زاویه  $\theta$  بر حسب z در موجبر پلاسمایی پیت هاین برای مُد TM مورد نظر

موجبر محاسبه شده است. با استفاده از شرایط مرزی در موجبر در نظر گرفته شده، روابط پاشندگی برای دو مد در نظر گرفته شده به دست آورده شده و سپس رابطه پاشندگی و مؤلفه‌های میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به دست آمده برای دو مد مذکور ترسیم شدند. همچنین حرکت یک الکترون تزریق شده به داخل موجبر فلزی پیت هاین حاوی پلاسمای سرد در حضور میدان مغناطیسی محوری یکنواخت قوی و برای مدهای TM و TE تحریک شده توسط تابش الکترومغناطیسی به صورت

## ۵- نتیجه گیری

در این پژوهش، معادله موج الکترومغناطیسی در یک موجبر با دیواره فلزی و سطح مقطعی به شکل منحنی پیت هاین که حاوی پلاسمای سرد در حضور میدان مغناطیسی محوری یکنواخت قوی به شدت مغناطیده شده است با در نظر گرفتن یک تقریب مناسب و روش جداسازی متغیرها حل شده است. مؤلفه‌های میدان الکترومغناطیسی برای مدهای TE و TM در این مدل

- [9] V. N. Mishra, V. Singh, B. Prasad, and S.P. Ojha, "An Analytical Investigation of the Dispersion Characteristic of a Lightguide with an Annular Core Cross-Section Bounded by Two Cardioids," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 23, pp. 221-224, 1999.
- [10] V. Mishra, "A Study on Piet Hein and Other Unconventional Geometry in Optical Waveguides," PhD. Thesis, Department of Applied Physics, I. T. B. H. U. Varanasi, India 1997.
- [11] V. Singh, B. Prasad, and S. P. Ojha, "Effect of Axial Sinusoidal Size Variation on the Modal Characteristics of an Annular Optical Fiber," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 31, pp. 211-214, 2001.
- [12] V. Singh, B. Prasad, and S. P. Ojha, "Weak Guidance Modal Analysis and Dispersion Curves of an Infrared-Lightguide Having a Core Cross-Section with a New Type of Asymmetric Loop Boundary," *Optical Fiber Technology*, vol. 6, pp. 290-298, 2000.
- [13] V. Singh, M. Joshi, B. Prasad, and S. P. Ojha, "Modal Dispersion Characteristics and Waveguide Dispersion of an Optical Waveguide Having a New Unconventional Core Cross-Section," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 18, pp. 455-468, 2004.
- [14] V. Singh, B. Prasad, and S. P. Ojha: "Theoretical Analysis and Dispersion Curves of an Annular Lightguide with a Cross-Section Bounded by Two Piet-Hein Curves," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 17 pp. 1025-1036, 2003.
- [15] V. Singh, S. N. Maurya, B. Prasad, and S. P. Ojha, "Conducting Sheath Helical Winding on the Core-Cladding Interface of a Lightguide Having a Piet Hein Super Elliptical Core Cross-Section and a Standard Optical Fiber of Circular Cross-Section - A Comparative Modal Analysis," *Progress in Electromagnetics Research*, PIER, vol. 59, pp. 231-249, 2006.
- [16] F. Nazari, H. Aliakbarian, and S. Radiom, "Design and Fabrication of Dielectric Constant Measurement Setup without Sample Holder in C band Motor, Scientific," *Journal of Applied Electromagnetics*, vol. 4, pp. 1-10, 2016 (In Persian).
- [17] S. Jalil Seyedhoseini, R. A. Sadeghzadeh, and H. Aliakbarian, "An Improved TEM-TE<sub>11</sub> Mode-Transducing Sectoral Antenna Using Dual Dielectric Window, Scientific," *Journal of Applied Electromagnetics*, vol. 4, pp. 21-16, 2016 (In Persian).
- [18] B. F. Mohamed and A. M. Gouda, "Electron Acceleration by Microwave Radiation Inside a Rectangular Waveguide," *Plasma Science and Technology* vol. 13, pp. 357-361, 2011.

گرافیکی مورد بررسی قرار گرفته است.. تأثیر میدان مغناطیسی محوری یکنواخت قوی که در تانسور گذردهی الکتریکی پلاسما لحاظ شده است روی انرژی جنبشی الکترون مذکور بررسی و تحقیق شد. معادلات دیفرانسیل ظاهر شده مربوط به معادلات حرکت و انرژی الکترون با استفاده از روش عددی رانگ کوتای مرتبه چهار حل شد. محاسبات عددی انجام شد و نتایج ترسیم شدند. تقریبی مناسب در نظر گرفته و از دیگر اثرات چشم‌پوشی شد.

توجه می‌کنید که در این پژوهش از مدهای خاص و تقریب مناسبی استفاده شده است. البته متذکر می‌شود که امکان برانگیختن مدهای موج سطحی در مرزهای ساختار وجود دارد، اما در این بررسی از تأثیر امواج سطحی و اثرات دیگر چشم‌پوشی شده است. در اینجا اثرات غیر خطی در نظر گرفته نشده‌اند. به هر حال تقریب‌های مختلفی را در نظر گرفته شد و از اثرات مختلفی چشم‌پوشی شده است؛ بنابراین نتایج در این ساختارها به‌طور تقریبی بررسی شده‌اند. صرف نظر از تقریب‌ها، نتایج ارائه شده در این مقاله هنوز برای تجزیه و تحلیل مسئله مفید هستند.

## ۷- مراجع

- [1] E. Snitzer "Cylindrical Dielectric Waveguide Modes," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 51, pp. 491-498, 1961
- [2] A. Kumar, Thyagarajan V, Ghatak AK: "Analysis of Rectangular Core Dielectric Waveguides: An Accurate Perturbation Approach," *Optics Letters*, vol. 8, pp. 63-65, 1983.
- [3] C. Yeh, "Elliptical Dielectric Waveguide," *Journal of Applied Physics*, Vol. 33, pp. 3235-3242, 1962.
- [4] C. Yeh, "Modes in Weakly Guiding Elliptical Optical Fibers," *Optical and Quantum Electronics*, vol. 8, pp. 43-47, 1976.
- [5] R. B. Dyott, "Glass-fiber Waveguide with Triangular Core," *Electronics Letters*, vol. 9, pp. 288-290, 1973.
- [6] J. R. James and I. N. L. Gallett, "Modal Analysis of Triangular Cored Fiber Waveguide," *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 120, pp. 1362-1370, 1973.
- [7] M. P. S. Rao, B. Prasad, P. Khastgir, and S. P. Ojha, "Modal Cutoff Conditions for an Optical Waveguide with a Hypocycloidal Cross Section," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 14, pp. 177-180, 1997.
- [8] M. P. S. Rao, V. Singh, B. Prasad, P. Khastgir, and S. P. Ojha, "An Analytical Study of the Dispersion Curves of an Annular Waveguide Made of Liquid Crystal," *Photonics Optoelectron*, vol. 5, pp. 73-78, 1998.

- [27] A. Abdoli-Arani and M. J. Basiry, "Influence of Electron-Ion Collisions in Plasma on the Electron Energy Gain Using the TE<sub>11</sub> Mode Inside an Elliptical Waveguide," *Physica Scripta*, vol. 91, pp. 095602, 2016.
- [28] A. Abdoli-Arani and M. Moghaddasi, "Study of Electron Acceleration through the Mode in a Collisional Plasma-Filled Cylindrical Waveguide," *Waves in Random and Complex Media*, vol. 26, pp. 339-347, 2016.
- [29] A. Abdoli-Arani, "Electron Acceleration Considering Ponderomotive Force Effect in a Plasma-Filled Rectangular Waveguide by Microwave Radiation," *Waves in Random and Complex Media*, vol. 26, pp. 407-416, 2016.
- [30] A. Abdoli-Arani and N. Ghanbari, "Nonlinear Effect of Microwave Longitudinal Ponderomotive Force on the Dynamics and Energy of an Externally Injected Electron in an Inhomogeneous Plasma-Filled Circular and Elliptical Cylinder Waveguides," *Waves in Random and Complex Media*, vol. 31, pp. 165-181, 2021.
- [31] A. Abdoli-Arani, "Electron Energy Gain in the Transverse Electric Mode of a Coaxial Waveguide Filled with Plasma by Microwave Radiation," *Waves in Random and Complex Media*, vol. 25, pp. 350-360, 2015.
- [32] A. Abdoli-Arani, "Electron Energy Gain in the Fundamental Mode of an Elliptical Waveguide in the Presence of Static Helical Magnet by Microwave Radiation," *Waves in Random and Complex Media*, vol. 25, pp. 243-258, 2015.
- [33] A. Abdoli-Arani, M. Kadkhodaei, and Z. Rahmani Nooshabadi, "Single Electron Acceleration in an Isosceles Right Triangular Waveguide," *Indian Journal of Physics*, vol. 94, 1279-1292, 2020.
- [19] B. F. Mohamed, A. M. Gouda, and L. Z. Ismail, "Electron Dynamics in Presence of Static Helical Magnet Inside Circular Waveguide," *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 39, pp. 842-846, 2011.
- [20] S. Kumar and M. Yoon, "Electron Dynamics and Acceleration Study in a Magnetized Plasma-Filled Cylindrical Waveguide," *Journal of Applied Physics*, vol. 103, pp. 023302, 2008.
- [21] S. Kumar and M. Yoon, "Electron Acceleration in a Warm Magnetized Plasma-Filled Cylindrical Waveguide," *Journal of Applied Physics*, vol. 104, pp. 073303, 2008.
- [22] H. K. Malik, S. Kumar, and K. P. Singh, "Electron Acceleration in a Rectangular Waveguide Filled with Unmagnetized Inhomogeneous Cold Plasma," *Laser and Particle Beams*, vol. 26, pp. 197-205, 2008.
- [23] S. K. Jawla, S. Kumar, and H. K. Malik, "Evaluation of Mode Fields in a Magnetized Plasma Waveguide and Electron Acceleration," *Optics communications*, vol. 251, pp. 346-360, 2005.
- [24] D. N. Gupta, N. Kant, D. E. Kim, and H. Suk, "Electron Acceleration to GeV Energy by a Radially Polarized Laser," *Physics Letters A*, vol. 368, pp. 402-407, 2007.
- [25] M. Litos, et al. "High-Efficiency Acceleration of an Electron Beam in a Plasma Wakefield Accelerator," *Nature*, vol. 515, pp. 92-95, 2014.
- [26] X., Liling, W. Gai, and X. Sun, "Field Analysis of a Dielectric-Loaded Rectangular Waveguide Accelerating Structure," *Physical Review E*, vol. 65, pp. 016505, 2001.

به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$V_{1\rho\alpha}(\rho, \xi) = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha\omega} \left[ iE_{1\rho}(\rho, \xi) + \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega} E_{1\xi}(\rho, \xi) \right] \quad (\text{الف-۱۰})$$

$$V_{1\xi\alpha}(\rho, \xi) = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha\omega} \left[ iE_{1\xi}(\rho, \xi) - \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega} E_{1\rho}(\rho, \xi) \right] \quad (\text{الف-۱۱})$$

$$V_{1z\alpha}(\rho, \xi) = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha\omega} [iE_{1z}(\rho, \xi)] \quad (\text{الف-۱۲})$$

با استفاده از معادلات ماکسول:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\rho, \xi, z, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\rho, \xi, z, t) \quad (\text{الف-۱۳})$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\rho, \xi, z, t) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\rho, \xi, z, t) \quad (\text{الف-۱۴})$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\rho, \xi, z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\rho, \xi, z, t) + \mu_0 \sum_{\alpha} q_\alpha n_\alpha(\rho, \xi, z, t) \mathbf{V}_\alpha(\rho, \xi, z, t). \quad (\text{الف-۱۵})$$

می‌توان معادله زیر را به دست آورد:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1 + \sum_{\alpha} q_\alpha n_{0\alpha} \mathbf{V}_{1\alpha} = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_1 \quad (\text{الف-۱۶})$$

که تانسور ثابت دی الکتریک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\rho\rho} & \epsilon_{\rho\xi} & \epsilon_{\rho z} \\ \epsilon_{\xi\rho} & \epsilon_{\xi\xi} & \epsilon_{\xi z} \\ \epsilon_{z\rho} & \epsilon_{z\xi} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (\text{الف-۱۷})$$

با قرار دادن مؤلفه‌های اختلالی سرعت‌ها در معادله (آ-۱۶).

عناصر تانسور دی الکتریک به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\epsilon_{\rho\rho} = \epsilon_{\xi\xi} = \epsilon_{\perp} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2}, \quad (\text{الف-۱۸})$$

$$\epsilon_{\rho\xi} = -\epsilon_{\xi\rho} = ig = i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \omega_{c\alpha}}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2}, \quad (\text{الف-۱۹})$$

$$\epsilon_{zz} = \epsilon_{\parallel} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}, \quad (\text{الف-۲۰})$$

بقیه عناصر صفر هستند. بنابراین تانسور ثابت دی الکتریک

به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (\text{الف-۲۱})$$

برای حالتی که میدان مغناطیسی نامحدود باشد، تانسور ثابت

دی الکتریک به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

## ۶- پیوست الف

### ۱-۶- مروری بر محاسبه تانسور ثابت دی

#### الکتریک یک پلاسمای مغناطیده سرد

یک پلاسمای یکنواخت و همگن و ساکن در میدان مغناطیسی یکنواخت  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$  و بدون حضور میدان الکتریکی یا جریان‌های پلاسمای در نظر گرفته می‌شود. کمیت‌های اختلالی چگالی، سرعت، میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n_\alpha(\rho, \xi, z, t) = n_{0\alpha}(\rho, \xi) + n_{1\alpha}(\rho, \xi) \exp[i(\omega t - \beta z)], \quad (\text{الف-۱})$$

$$\mathbf{V}_\alpha(\rho, \xi, z, t) = \{V_{1\rho\alpha}(\rho, \xi) \hat{e}_\rho + V_{1\xi\alpha}(\rho, \xi) \hat{e}_\xi + V_{1z\alpha}(\rho, \xi) \hat{e}_z\} \exp[i(\omega t - \beta z)], \quad (\text{الف-۲})$$

$$\mathbf{B}(\rho, \xi, z, t) = \{B_{1\rho}(\rho, \xi) \hat{e}_\rho + B_{1\xi}(\rho, \xi) \hat{e}_\xi + B_{1z}(\rho, \xi) \hat{e}_z\} \exp[i(\omega t - \beta z)] + B_0 \hat{e}_z, \quad (\text{الف-۳})$$

$$\mathbf{E}(\rho, \xi, z, t) = \{E_{1\rho}(\rho, \xi) \hat{e}_\rho + E_{1\xi}(\rho, \xi) \hat{e}_\xi + E_{1z}(\rho, \xi) \hat{e}_z\} \exp[i(\omega t - \beta z)], \quad (\text{الف-۴})$$

که در آن، اندیس صفر قسمت تعادلی و اندیس ۱ قسمت

اختلالی را نشان می‌دهد. و  $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\xi, \hat{e}_z$  بردارهای یکه در جهت‌های  $\rho, \xi, z$  هستند. کمیت‌های اختلالی باید در معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial}{\partial t} n_\alpha(\rho, \xi, z, t) + \nabla \cdot (n_\alpha(\rho, \xi, z, t) \mathbf{V}_\alpha(\rho, \xi, z, t)) = 0, \quad (\text{الف-۵})$$

و معادله انتقال تکانه:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\alpha(\rho, \xi, z, t) \cdot \nabla \right] V_\alpha(\rho, \xi, z, t) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left[ \mathbf{E}(\rho, \xi, z, t) + \frac{1}{c} \mathbf{V}_\alpha(\rho, \xi, z, t) \times \mathbf{B}(\rho, \xi, z, t) \right], \quad (\text{الف-۶})$$

صدق کنند. با خطی سازی معادله انتقال تکانه برای سه

مؤلفه معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$i\omega m_\alpha V_{1\rho\alpha}(\rho, \xi) = q_\alpha [E_{1\rho}(\rho, \xi) + B_0 V_{1\xi\alpha}(\rho, \xi)] \quad (\text{الف-۷})$$

$$i\omega m_\alpha V_{1\xi\alpha}(\rho, \xi) = q_\alpha [E_{1\xi}(\rho, \xi) - B_0 V_{1\rho\alpha}(\rho, \xi)] \quad (\text{الف-۸})$$

$$i\omega m_\alpha V_{1z\alpha}(\rho, \xi) = q_\alpha E_{1z}(\rho, \xi) \quad (\text{الف-۹})$$

و بنابراین با اندکی محاسبه، مؤلفه‌های اختلالی سرعت‌ها

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (\text{الف-۲۲})$$

برای محاسبه معادله موج در این حالت، از دو طرف معادله (الف-۱۴) کرل گرفته می‌شود:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{B} \quad (\text{الف-۲۳})$$

با در نظر گرفتن معادله:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{الف-۲۴})$$

معادله موج برای مؤلفه محوری میدان مغناطیسی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\nabla_T^2 B_z + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2\right) B_z = 0 \quad (\text{الف-۲۵})$$

با کرل گرفتن از دو طرف معادله (الف-۱۳)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} \quad (\text{الف-۲۶})$$

معادله زیر را می‌توان به دست آورد:

$$\nabla^2 E_z + \frac{\omega^2}{c^2} E_z - [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})]_z = 0 \quad (\text{الف-۲۷})$$

با در نظر گرفتن معادله:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (\text{الف-۲۸})$$

و

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\hat{e}_\rho E_\rho + \hat{e}_\xi E_\xi + \hat{e}_z (1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}) E_z] \\ = \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} E_z = 0 \end{aligned} \quad (\text{الف-۲۹})$$

معادله موج برای مؤلفه محوری میدان الکتریکی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\nabla_T^2 E_z + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2\right) \varepsilon_{\parallel} E_z = 0 \quad (\text{الف-۲۶})$$

که:

$$\nabla^2 = \nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{الف-۲۶})$$