

Electromagnetic Constitutive Relations in Eccentric Rotating Frames

H.Ramezani-Aval 

* Assistant Professor, Gonabad University, Gonabad, Iran

(Received: 22/05/2023 revised: 29/08/2023 Accepted:22/09/2023 published: 07/11/2023)

DOR: <https://dorl.net/dor/20.1001.1.26455153.1402.11.2.7.0>

Abstract

In this article, while analytically reviewing the Landau formalism for electrodynamic equations in the presence of a gravitational field, we show that the three-dimensional electromagnetic constitutive relations in this formalism can be expressed by two equivalent methods. Then we obtain the constitutive relations for the Galilean rotating observer with both methods and show its compatibility with the previous results. We also present the electromagnetic constitutive relations for an eccentric rotating observer. To solve some ambiguities, especially in the articles related to this topic in the field of electrical engineering, different representations of the three-dimensional form of constitutive relations in the Galilean rotating observer's frame are expressed in full detail. Also, the connection between different representations of three-dimensional constitutive relations will be explained. In the end, considering the practical and experimental importance of the eccentric rotating observer, we will obtain the electromagnetic constitutive relations for this particular observer.

Keywords : Electromagnetic constitutive relations; Landau formalism; Eccentric rotating observe

* Corresponding author E-mail: hramezania@alumni.ut.ac.ir

روابط ساختاری الکترومغناطیس در چارچوب ناظر چرخان غیرمرکزی

حسین رضائی اول*^{ID}

استادیار، دانشگاه گناباد، گناباد، ایران

(دریافت: ۱۴۰۲/۰۳/۱۰، بازنگری: ۱۴۰۲/۰۶/۰۷، پذیرش: ۱۴۰۲/۰۶/۳۱، انتشار: ۱۴۰۲/۰۸/۱۶)

DOR: <https://dorl.net/dor/20.1001.1.26455153.1402.11.2.7.0>

* این مقاله یک مقاله با دسترسی آزاد است که تحت شرایط و ضوابط مجوز Creative Commons Attribution (CC BY) توزیع شده است.

نویسندگان

ناشر: دانشگاه جامع امام حسین (ع)

چکیده

در این مقاله ضمن مرور تحلیلی فرمالیزم لاندائو برای معادلات الکترودینامیکی در حضور میدان گرانشی، نشان می‌دهیم که روابط ساختاری سه‌بعدی الکترومغناطیس در این فرمالیزم را با دو روش هم‌ارز می‌توان بیان کرد. در ادامه روابط ساختاری برای ناظر چرخان گالیله‌ای را با هر دو روش به دست آورده و انطباق آن با نتایج قبلی را نشان می‌دهیم. همچنین روابط ساختاری الکترومغناطیس را برای ناظر چرخان غیرمرکزی ارائه می‌دهیم. با هدف رفع برخی ابهام‌ها مخصوصاً در مقالات مربوط به این موضوع در حوزه مهندسی برق، نمایش‌های متفاوت از شکل سه‌بعدی روابط ساختاری در چارچوب ناظر چرخان گالیله‌ای با استفاده از فرمالیزم لاندائو با جزئیات کامل بیان می‌شود. همچنین ارتباط بین نمایش‌های مختلف روابط ساختاری سه‌بعدی توضیح داده خواهد شد. در پایان با توجه به اهمیت کاربردی و آزمایشگاهی ناظر چرخان غیرمرکزی، روابط ساختاری الکترومغناطیس را برای این ناظر خاص به دست خواهیم آورد.

کلیدواژه‌ها: روابط ساختاری الکترومغناطیس، فرمالیزم لاندائو، ناظر چرخان غیرمرکزی

۱- مقدمه

الکتریکی، تراوایی مغناطیسی و الکترومغناطوگرانشی^۳ را معرفی می‌کند. در ادامه در [۳] نشان داده می‌شود که تناظر بین محیط مادی و گرانش می‌تواند به‌عنوان یک روش تحقیق مناسب مورد استفاده قرار گیرد. سپس این ایده برای مسئله انتشار موج الکترومغناطیسی در میدان گرانشی مورد استفاده قرار می‌گیرد [۴-۶]؛ در این کارها مسئله انتشار موج گرانشی در فضا زمان ریمانی به مسئله انتشار این موج در محیط دوگانه-ناهمسان‌گرد^۴ فروکاسته می‌شود. تناظر گرانشی ضریب شکست یک محیط مغناطوالکتریکی^۵ هم در ادامه در [۶] و اخیراً هم به‌عنوان نمونه در [۷] مورد بررسی قرار گرفته است.

از طرف دیگر، الکترودینامیک چارچوب‌های غیر اینرسی از جمله چارچوب ناظر چرخان به‌خاطر جنبه‌های کاربردی آن، به طور خاص در مهندسی برق، مورد توجه بوده است [۸-۱۸]. در همین راستا شکل سه‌بعدی معادلات ماکسول و روابط ساختاری در چارچوب چرخان در [۱۴-۱۸] مورد بررسی قرار گرفته است. با کمک گرفتن از اصل هم‌ارزی می‌توان انتظار داشت که از تناظری که بین میدان گرانشی و محیط مادی وجود دارد و در

معادلات الکترودینامیکی در حضور میدان گرانشی در غیاب ماده، در شکل ظاهری با معادلات الکترودینامیکی در فضا - زمان تخت در محیطی شامل ماده‌ای با ویژگی‌های الکترومغناطیسی مطابقت دارد. بر این اساس می‌توان انتظار داشت که ویژگی‌های الکترومغناطیسی و اپتیکی متناظر با یک فضا زمان ریمانی را بتوان بر حسب کمیت‌هایی که از روی مولفه‌های متریک ساخته می‌شوند بیان کرد. این ایده جذاب هم ارزی بین گرانش و محیط اپتیکی که در آغاز توسط خود انیشتین مطرح شده بود، ابتدا در [۱] مورد استفاده قرار گرفت. لاندائو و لیفشیتز با استخراج اصل فرما و به دست آوردن روابط ساختاری^۱ در حضور یک میدان گرانشی، ضریب شکست اپتیکی، گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی را بر حسب مولفه‌های متریک برای یک میدان گرانشی پایا^۲ بیان می‌کنند. در [۲]، پلبانسکی معادلات ماکسول در نظریه نسبیت عام را متناظر با الکترودینامیک در محیط ماکروسکوپی فرمول‌بندی می‌کند و تانسورهای سه‌بعدی گذردهی

در رهیافت $1+3$ (نخ کردن^۱) برای جداسازی فضا زمان [۲۱]. تصویرسازی نسبت به یک بردار مماس زمان گونه u^μ انجام می‌شود. در فضا زمان مانا^۲ u^μ بر ابر سطح $t = cte$ عمود است ولی در فضا زمان پایا اینگونه نیست. بنابراین، تمایز مهم این نوع جداسازی با جداسازی $3+1$ (ورقه ورقه کردن^۳) در همین جا آشکار می‌شود. در $1+3$ نیازی به تعریف ابرسطح و بردار عمود بر آن نیست و جداسازی بر اساس بردار مماس بر منحنی مسیر ناظر یا همان بردار سرعت ناظر انجام می‌شود و تانسور تصویر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_{ij} = g_{ij} + u_i u_j$$

واضح است که این تعریف وابسته به ناظر است. اگر u_i سرعت

ناظر همراه عمومی^۴ یعنی $u_i = \frac{1}{\sqrt{g_{..}}} \delta_i^.$ باشد در این صورت

خواهیم داشت

$$h_{..} = 0, \quad h_{.i} = 0, \quad h_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{. \alpha} g_{. \beta}}{g_{..}} \right) \quad (1)$$

که $\gamma_{\alpha\beta}$ همان تانسور فضایی است که در [۱] بر اساس یک فرآیند فیزیکی از طریق ارسال و دریافت یک سیگنال نوری بین دو نقطه‌ی بی‌نهایت نزدیک و تعریف طول فضایی بر اساس آن به دست آمده است. بنابراین، می‌توان گفت آنچه در [۱] ارائه شده است حالت خاصی از جداسازی $1+3$ است. ما از این روش به نام «فرمالیزم لاندائو» یاد می‌کنیم و جزئیات و برخی نتایج آن را که به موضوع این مقاله مربوط می‌شود در ادامه بیان می‌کنیم. در این فرمالیزم متریک فضا زمان پایا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$ds^2 = g_{..} (dx^{\cdot} - g_{\alpha} dx^{\alpha})^2 - \gamma_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \quad (2)$$

که در آن که $\gamma_{\alpha\beta}$ همان تانسور فضایی سه‌بعدی است که در (۱) معرفی شد و ویژگی‌های هندسی فضای واقعی را تعیین می‌کند. همچنین

$$g_{\alpha} = -\frac{g_{. \alpha}}{g_{..}} \quad (3)$$

برداری در فضای با متریک سه‌بعدی $\gamma_{\alpha\beta}$ است که بردار پتانسیل مغناطیوگرانشی نامیده می‌شود. با توجه به اینکه $g^{ik} g_{kl} = \delta_l^i$ ، داریم:

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} + g^{\alpha.} g_{. \gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}, \quad (4)$$

پاراگراف قبل از آن صحبت شد، بتوان برای چارچوب‌های غیراینرسی از جمله چارچوب چرخان هم استفاده کرد. به‌عنوان نمونه در [۱۹] انتشار موج الکترومغناطیسی در چارچوب مرجع چرخان یکنواخت با استفاده از روابط ساختاری که با روش فوق به دست آمده مورد مطالعه قرار گرفته است. در عین حال نمایش‌های متفاوتی از روابط ساختاری در این کارها مشاهده می‌شود.

هدف این مقاله این است که جهت رفع برخی ابهام‌ها، مخصوصاً در مقالات مربوط به این موضوع در حوزه مهندسی برق، نمایش‌های متفاوت از شکل سه‌بعدی روابط ساختاری در چارچوب ناظر چرخان گالیله‌ای با استفاده از فرمالیزم لاندائو با جزئیات کامل بیان شود. همچنین ارتباط بین نمایش‌های مختلف روابط ساختاری سه‌بعدی توضیح داده خواهد شد. در پایان با توجه به اهمیتی که ناظر چرخان غیرمرکزی به لحاظ کاربردی و آزمایشگاهی دارد، روابط ساختاری الکترومغناطیس را برای ناظر چرخان غیرمرکزی به دست خواهیم آورد. لازم به تأکید است که بر خلاف اکثر مراجع معرفی شده در بالا که از فرمالیزم معرفی شده در [۲۰] برای نمایش معادلات ماکسول و روابط ساختاری استفاده کرده‌اند، در اینجا ما از فرمالیزم لاندائو استفاده خواهیم کرد. این دو فرمالیزم در برخی ضرایب با هم تفاوت دارند.

در بخش دوم این مقاله فرمالیزم لاندائو برای معرفی معادلات ماکسول و روابط ساختاری ارائه و برخی روابط آن با جزئیات بیشتری اثبات می‌شود. همچنین در این بخش نشان می‌دهیم که روابط ساختاری سه‌بعدی الکترومغناطیسی را در این فرمالیزم با دو روش هم‌ارز می‌توان به دست آورد. در بخش سوم روابط ساختاری را برای ناظر چرخان گالیله‌ای به دست آورده و انطباق آن با نتایج قبلی را نشان می‌دهیم. در بخش چهارم روابط ساختاری الکترومغناطیس را برای ناظر چرخان غیرمرکزی ارائه می‌دهیم.

در این متن، S' و مختصه‌های پریم دار برای چارچوب اینرسی ساکن آزمایشگاه و S و مختصه‌های بدون پریم برای چارچوب چرخان استفاده خواهد شد. حروف لاتین (i, j, k) از ۰ تا ۳ و حروف یونانی (μ, ν) از ۱ تا ۳ تغییر می‌کنند. سرعت نور را $c = 1$ می‌گیریم و از نشانگان $(+, -, \cdot, \cdot)$ استفاده می‌کنیم.

۲- روابط ساختاری الکترومغناطیس در فرمالیزم

لاندائو

۲-۱- رهیافت لاندائو برای جداسازی فضا زمان

1-Threading

2-Static

3-Slicing

4-General Comoving Observer

ضمناً برای ماتریس لوی-چویتای سه‌بعدی داریم $e^{123} = 1$ و علامت تحت جابجایی اندیس‌ها تغییر می‌کند.

می‌دانیم که بردار c را می‌توان به صورت بردار دوگان تانسور پادمتقارن $c_{\alpha\beta}$ به صورت زیر تعریف کرد:

$$c_{\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} B^{\beta\gamma}, \quad c^{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} c_{\beta\gamma}$$

و برعکس:

$$c_{\alpha\beta} = \sqrt{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} c^{\gamma}, \quad c^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} c_{\gamma}$$

با استفاده از این روابط و تعریف‌های (۱۰) تانسورهای میدان را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F(E, B)_{ij} = \begin{bmatrix} \cdot & E_{L1} & E_{L2} & E_{L3} \\ -E_{L1} & \cdot & -\sqrt{\gamma} B_L^3 & \sqrt{\gamma} B_L^2 \\ -E_{L2} & \sqrt{\gamma} B_L^3 & \cdot & -\sqrt{\gamma} B_L^1 \\ -E_{L3} & -\sqrt{\gamma} B_L^2 & \sqrt{\gamma} B_L^1 & \cdot \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$F(D, H)^{ij} = \begin{bmatrix} \cdot & -\frac{D_L^1}{\sqrt{g_{..}}} & -\frac{D_L^2}{\sqrt{g_{..}}} & -\frac{D_L^3}{\sqrt{g_{..}}} \\ \frac{D_L^1}{\sqrt{g_{..}}} & \cdot & -\frac{H_{L3}}{\sqrt{-g}} & \frac{H_{L2}}{\sqrt{-g}} \\ \frac{D_L^2}{\sqrt{g_{..}}} & \frac{H_{L3}}{\sqrt{-g}} & \cdot & -\frac{H_{L1}}{\sqrt{-g}} \\ \frac{D_L^3}{\sqrt{g_{..}}} & -\frac{H_{L2}}{\sqrt{-g}} & \frac{H_{L1}}{\sqrt{-g}} & \cdot \end{bmatrix} \quad (12)$$

۲-۳- روابط ساختاری سه‌بعدی در فرمالیزم لاندائو

برای به دست آوردن روابط ساختاری در این فرمالیزم به دو روش می‌توان عمل کرد:

روش اول: با استفاده از تعریف‌های ارائه شده در روابط (۱۰) اولین رابطه ساختاری را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} E_{L\alpha} &= g_{.l} g_{\alpha m} F^{lm} \\ &= g_{..} g_{\alpha\beta} F^{\cdot\beta} \\ &+ g_{.\lambda} g_{\alpha.} F^{\lambda\cdot} \\ &+ g_{.\lambda} g_{\alpha\delta} F^{\lambda\delta} \end{aligned} \quad (13)$$

جمله اول سمت راست (۱۳):

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta.} + g^{\alpha.} g_{..} = \delta^{\alpha.} = \cdot$$

بنابراین، با تعیین $g^{\alpha.}$ از معادله دوم در (۴) و جای‌گذاری آن در اولی خواهیم داشت:

$$-g^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha} \quad (5)$$

و بنابراین، $-\gamma_{\beta\gamma}$ معکوس $g^{\alpha\beta}$ است یا به طور معادل:

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} \quad (6)$$

یادآوری می‌کنیم که:

$$g_{..} = \frac{\text{cofactor}(g^{\cdot\cdot})}{\det(g^{ij})} \quad (7)$$

بنابراین، با استفاده از روابط (۵) تا (۷) می‌توانیم نشان دهیم که دترمینان‌های g و γ که به ترتیب متناظر با g_{ij} و $\gamma_{\alpha\beta}$ هستند، به صورت زیر به هم مرتبطند:

$$g = -g_{..} \gamma \quad (8)$$

با استفاده از (۶) و معادله دوم در (۴) می‌توانیم مولفه‌های

پادوردای g را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$g^{\alpha} = -g^{\cdot\alpha} \quad (9)$$

۲-۲- شکل سه‌بعدی میدان‌های الکترومغناطیس در فرمالیزم لاندائو

لاندائو و لیفشیتز [۱] شکل سه‌بعدی میدان‌های الکترومغناطیسی را به صورت زیر ارائه می‌دهند:

$$E_{Li} = F_{.i}, \quad D_L^i = -\sqrt{g_{..}} F^{\cdot i},$$

$$B_{ij} = F_{ij}, \quad H^{ij} = \sqrt{g_{..}} F^{ij},$$

$$\begin{aligned} B_L^i &= -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{ijk} B_{jk}, \\ H_{Li} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma} e_{ijk} H^{jk} \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن به‌عنوان مثال E_L و B_L بردارهایی هستند که در سه بعد تعریف می‌شوند و اندیس L نشان می‌دهد که مربوط به فرمالیزم لاندائو هستند. لازم به ذکر است که با مقایسه‌ی تانسور میدان لاندائو با تانسور میدانی که با کمک تتراد مختصاتی^۱ به دست می‌آید، می‌توان میدان‌های لاندائو را بر حسب مولفه‌های مختصاتی یا غیرمختصاتی (فیزیکی) میدان تعریف کرد [۲۲].

$$= \gamma^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\gamma} e_{\beta\gamma\lambda} \sqrt{g_{00}} \right) (g^{\gamma\theta} g^{\lambda\delta} F_{0\delta} + g^{\gamma\theta} g^{\lambda\Omega} F_{\theta\Omega}) \quad (19)$$

با استفاده از $F_{0\alpha} = E_{L\alpha}$ و $\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}$ دو جمله اول در خط آخر (۱۹) را می‌توان به اینصورت نوشت:

$$\begin{aligned} & \gamma^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\gamma} e_{\beta\gamma\lambda} \sqrt{g_{00}} \right) (g^{\gamma\theta} g^{\lambda\delta} F_{0\delta} + g^{\gamma\theta} g^{\lambda\Omega} F_{\theta\Omega}) \\ &= \sqrt{g_{00}} \gamma^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\gamma} e_{\beta\gamma\lambda} \right) (E_L^\lambda g^\gamma - E_L^\gamma g^\lambda) \\ &= \sqrt{g_{00}} \gamma^{\alpha\beta} (\mathbf{E}_L \times \mathbf{g})_\beta \\ &= \sqrt{g_{00}} (\mathbf{E}_L \times \mathbf{g})^\alpha \end{aligned} \quad (20)$$

و جمله سوم در خط آخر (۱۹):

$$\begin{aligned} & \gamma^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\gamma} e_{\beta\gamma\lambda} \sqrt{g_{00}} \right) g^{\gamma\theta} g^{\lambda\Omega} F_{\theta\Omega} \\ &= \gamma^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\gamma} e_{\beta\gamma\lambda} \sqrt{g_{00}} \right) \gamma^{\gamma\theta} \gamma^{\lambda\Omega} B_{\theta\Omega} \\ &= \gamma^{\alpha\beta} \sqrt{g_{00}} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\gamma} e_{\beta\gamma\lambda} B^{\gamma\lambda} \right) \\ &= \gamma^{\alpha\beta} \sqrt{g_{00}} B_{L\beta} = \sqrt{g_{00}} B_L^\alpha \end{aligned} \quad (21)$$

بنابراین، با جای‌گذاری (۲۰) و (۲۱) در (۱۹) خواهیم داشت:

$$B_L^\alpha = \frac{H_L^\alpha}{\sqrt{g_{00}}} + (\mathbf{g} \times \mathbf{E}_L)^\alpha \quad (22)$$

که دومین رابطه ساختاری در فرمالیزم لاندائو است.

روش دوم: با استفاده از تعریف‌های (۱۱) و (۱۲) برای

تانسور میدان، روابط ساختاری را می‌توان با کمک هر یک از دو رابطه زیر به دست آورد:

$$F(D, H)_{ij} = F(E, B)_{ij} \quad (23)$$

و

$$F(D, H)^{ij} = F(E, B)^{ij} \quad (24)$$

می‌توان نشان داد نتیجه استفاده از دو معادله فوق برای روابط ساختاری با یکدیگر و همچنین با آنچه از روش اول به دست آمد یکسان است. (البته باید توجه داشت که برای مشاهده تطابق کامل نیاز است که اندیس‌های بردارهای ۳ بعدی را با متریک فضایی γ و اندیس‌های تانسورهای ۴ بعدی را با متریک g بالا یا پایین ببریم.) به‌عنوان نمونه:

$$\begin{aligned} F(E, B)^{12} &= g^{1i} g^{2j} F(E, B)_{ij} \\ &= g^{10} g^{2\alpha} F(E, B)_{0\alpha} + g^{1\alpha} g^{20} F(E, B)_{\alpha 0} \\ &+ g^{1\alpha} g^{2\beta} F(E, B)_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{..} g_{\alpha\beta} F^{\cdot\beta} &= g_{00} \left(-\gamma_{\alpha\beta} + \frac{g_{..} g_{0\beta}}{g_{..}} \right) F^{\cdot\beta} \\ &= \sqrt{g_{..}} \gamma_{\alpha\beta} D_L^\beta + g_{..} g_{\alpha\beta} F^{\cdot\beta} \\ &= \sqrt{g_{..}} D_{L\alpha} + g_{..} g_{\alpha\beta} F^{\cdot\beta} \end{aligned} \quad (14)$$

جمله دوم سمت راست (۱۳):

$$g_{..} g_{\alpha\beta} F^{\lambda\cdot} = -g_{0\alpha} g_{0\beta} F^{0\beta} \quad (15)$$

جمله سوم سمت راست (۱۳):

$$\begin{aligned} g_{0\lambda} g_{\alpha\delta} F^{\lambda\delta} &= g_{0\lambda} \left(-\gamma_{\alpha\delta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\delta}}{g_{00}} \right) \frac{H^{\lambda\delta}}{\sqrt{g_{00}}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} g_{0\lambda} \gamma_{\alpha\delta} H^{\lambda\delta} \\ &+ \frac{1}{g_{00} \sqrt{g_{00}}} g_{0\alpha} g_{0\lambda} g_{0\delta} H^{\lambda\delta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} g_{0\lambda} \gamma_{\alpha\delta} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{\lambda\delta\theta} H_{L\theta} \\ &= -\sqrt{g_{00}} \gamma_{\alpha\delta} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{\lambda\delta\theta} g_\lambda H_{L\theta} \end{aligned}$$

از طرف دیگر در مختصات خمیده سه‌بعدی، مولفه‌های بردار $c = a \times b$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} c_\alpha &= \sqrt{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} a^\beta b^\gamma, \\ c^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma \end{aligned} \quad (16)$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} g_{0\lambda} g_{\alpha\delta} F^{\lambda\delta} &= \sqrt{g_{00}} \gamma_{\alpha\delta} (\mathbf{g} \times \mathbf{H}_L)^\delta \\ &= \sqrt{g_{00}} (\mathbf{g} \times \mathbf{H}_L)_\alpha \end{aligned} \quad (17)$$

با جای‌گذاری (۱۴)، (۱۵) و (۱۷) در (۱۳) خواهیم داشت:

$$D_{L\alpha} = \frac{E_{L\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} + (\mathbf{H}_L \times \mathbf{g})_\alpha \quad (18)$$

که اولین رابطه ساختاری در فرمالیزم لاندائو است.

برای به دست آوردن دومین رابطه ساختاری هم به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} H_L^\alpha &= \gamma^{\alpha\beta} H_{L\beta} = \gamma^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\gamma} e_{\beta\gamma\lambda} H^{\gamma\lambda} \right) \\ &= \gamma^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\gamma} e_{\beta\gamma\lambda} \sqrt{g_{00}} F^{\gamma\lambda} \right) \\ &= \gamma^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\gamma} e_{\beta\gamma\lambda} \sqrt{g_{00}} \right) (g^{\gamma\lambda} g^{\lambda\Omega} F_{\Omega\Omega}) \end{aligned}$$

در نتیجه متریک ناظر چرخان گالیله‌ای به صورت زیر داده می‌شود:

$$ds^2 = (1 - r^2\Omega^2)dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi dt - dz^2 - r^2 d\varphi^2 - dr^2$$

بنابراین، داریم:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 - r^2\Omega^2 & 0 & -r^2\Omega & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -r^2\Omega & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Omega & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & \frac{-1 + r^2\Omega^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

و با استفاده از (۱) و (۶) متریک سه‌بعدی فضایی متناظر با ناظر چرخان گالیله‌ای به صورت زیر است:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{1 - r^2\Omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\gamma^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 - r^2\Omega^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$g = -r^2, \quad \gamma = \frac{r^2}{1 - r^2\Omega^2} \quad (27)$$

برای به دست آوردن روابط ساختاری متناظر با ناظر چرخان گالیله‌ای می‌توان از دو روشی که در بخش قبل اشاره شد استفاده کرد. چنان‌که در بخش قبل ذکر شد نتایج هر دو روش قابل تبدیل به یکدیگر است. ولی چون این نتایج در منابع مختلف به صورت متفاوت ذکر شده است، با هدف مقایسه و رفع ابهام، در اینجا نتایج هر دو روش را ارائه می‌دهیم.

در روش اول به طور مستقیم از روابط (۱۸) و (۲۲) استفاده می‌کنیم و با استفاده از (۳)، (۹) و (۱۶) و جای‌گذاری از (۲۵) و (۲۷) خواهیم داشت:

$$D_{L1} = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2\Omega^2}} E_{L1} - \frac{r\Omega}{\sqrt{1 - r^2\Omega^2}} H_{L3} \quad (1-28)$$

$$D_{L2} = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2\Omega^2}} E_{L2} \quad (2-28)$$

$$D_{L3} = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2\Omega^2}} E_{L3} + \frac{r\Omega}{\sqrt{1 - r^2\Omega^2}} H_{L1} \quad (3-28)$$

$$= g^1 \gamma^{2\alpha} E_{L\alpha} + g^2 \gamma^{1\alpha} (-E_{L\alpha}) + \gamma^{1\alpha} \gamma^{2\beta} B_{\alpha\beta}$$

$$= g^1 E_L^2 - g^2 E_L^1 + B^{12}$$

$$= g^1 E_L^2 - g^2 E_L^1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} B_{L3}$$

اکنون با استفاده از $F(E, B)^{12} = F(D, H)^{12}$ و تعریف ضرب برداری در (۱۶) داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\mathbf{g} \times \mathbf{E}_L)_3 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} B_{L3} = -\frac{H_{L3}}{\sqrt{-g}}$$

در نتیجه:

$$B_{L3} = \frac{H_{L3}}{\sqrt{g_{00}}} + (\mathbf{g} \times \mathbf{E}_L)_3$$

که مؤلفه سوم (۲۲) است. به عنوان یک مثال دیگر:

$$F(D, H)_{01} = g_{0i} g_{1j} F(D, H)^{ij}$$

$$= g_{00} g_{1\alpha} F(D, H)^{0\alpha} + g_{0\alpha} g_{10} F(D, H)^{\alpha 0} + g_{0\alpha} g_{1\beta} F(D, H)^{\alpha\beta}$$

$$= g_{00} \left(-\gamma_{1\alpha} + \frac{g_{01} g_{0\alpha}}{g_{00}} \right) \left(\frac{-D_L^\alpha}{\sqrt{g_{00}}} \right) + g_{0\alpha} g_{10} F \left(\frac{D_L^\alpha}{\sqrt{g_{00}}} \right) + g_{0\alpha} \left(-\gamma_{1\beta} + \frac{g_{01} g_{0\beta}}{g_{00}} \right) \left(\frac{H^{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{00}}} \right)$$

$$= \sqrt{g_{00}} D_{L1} + \sqrt{g_{00}} \gamma_{1\beta} e^{\beta\alpha\gamma} g_\alpha H_{L\gamma}$$

$$= \sqrt{g_{00}} D_{L1} + \sqrt{g_{00}} \gamma_{1\beta} (\mathbf{g} \times \mathbf{H}_L)^\beta$$

$$= \sqrt{g_{00}} (D_{L1} + (\mathbf{g} \times \mathbf{H}_L)_1)$$

اکنون با استفاده از $F(E, B)_{01} = F(D, H)_{01}$ داریم:

$$E_{L1} = \sqrt{g_{00}} (D_{L1} + (\mathbf{g} \times \mathbf{H}_L)_1)$$

و در نتیجه:

$$D_{L1} = \frac{E_{L1}}{\sqrt{g_{00}}} - (\mathbf{g} \times \mathbf{H}_L)_1$$

که مؤلفه اول (۱۶) است. به این ترتیب نشان داده شد که دو روش ذکر شده در این بخش برای به دست آوردن روابط ساختاری معادل هم هستند و به نتایج یکسان منجر می‌شوند.

۳- روابط ساختاری برای ناظر چرخان گالیله‌ای

برای مقایسه با نتایج قبلی ابتدا به سراغ تبدیلات گالیله‌ای دوران می‌رویم و روابط ساختاری را در فضا زمان ناظر چرخان گالیله‌ای به دست می‌آوریم. تبدیلات گالیله‌ای در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر است:

$$t = t', \quad r = r', \quad \varphi = \varphi' - \Omega t, \quad z = z'$$

$$F(D, H)^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{D_L^1}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} & -\frac{D_L^2}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} & -\frac{D_L^3}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} \\ \frac{D_L^1}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} & 0 & -\frac{H_{L3}}{r} & \frac{H_{L2}}{r} \\ \frac{D_L^2}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} & \frac{H_{L3}}{r} & 0 & -\frac{H_{L1}}{r} \\ \frac{D_L^3}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} & -\frac{H_{L2}}{r} & \frac{H_{L1}}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad 9$$

برای به دست آوردن روابط ساختاری با روش دوم با کمک (۲۳) و (۲۴)، ماتریس‌های فوق را به ترتیب با اندیس‌های بالا و پایین به دست می‌آوریم:

$$B_{L1} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} H_{L1} + \frac{1}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} E_{L3} \quad (۴-۲۸)$$

$$B_{L2} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} H_{L2} \quad (۵-۲۸)$$

$$B_{L3} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} H_{L3} - \frac{1}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} E_{L1} \quad (۶-۲۸)$$

اما برای روش دوم با استفاده از روابط (۲۵) تا (۲۷) و تعریف‌های (۱۱) و (۱۲) تانسورهای میدان برای ناظر چرخان در فرمالیزم لاندائو به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F(E, B)_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & E_{L1} & E_{L2} & E_{L3} \\ -E_{L1} & 0 & -\frac{r}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} B_L^3 & \frac{r}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} B_L^2 \\ -E_{L2} & \frac{r}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} B_L^3 & 0 & -\frac{r}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} B_L^1 \\ -E_{L3} & -\frac{r}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} B_L^2 & \frac{r}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} B_L^1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F(E, B)^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -E_{L1} + \frac{r\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} B_L^3 & -\frac{E_{L2}}{r^2} & -E_{L3} - \frac{r\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} B_L^1 \\ E_{L1} - \frac{r\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} B_L^3 & 0 & -\frac{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}{r\Omega} B_L^3 - \Omega E_{L1} & \frac{r}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} B_L^2 \\ \frac{E_{L2}}{r^2} & \frac{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}{r\Omega} B_L^3 + \Omega E_{L1} & 0 & -\frac{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}{r\Omega} B_L^1 + \Omega E_{L3} \\ E_{L3} + \frac{r\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} B_L^1 & -\frac{r}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} B_L^2 & \frac{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}{r\Omega} B_L^3 - \Omega E_{L1} & 0 \end{bmatrix}$$

9

$$F(D, H)_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1-r^2\Omega^2} D_L^1 + r\Omega H_{L3} & \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} D_L^2 & \sqrt{1-r^2\Omega^2} D_L^3 - r\Omega H_{L1} \\ -\sqrt{1-r^2\Omega^2} D_L^1 - r\Omega H_{L3} & 0 & \frac{r^2\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} D_L^1 - rH_{L3} & \frac{H_{L2}}{r} \\ -\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} D_L^2 & -\frac{r^2\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} D_L^1 + rH_{L3} & 0 & -\frac{r^2\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} D_L^3 - rH_{L1} \\ -\sqrt{1-r^2\Omega^2} D_L^3 + r\Omega H_{L1} & -\frac{H_{L2}}{r} & \frac{r^2\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} D_L^3 + rH_{L1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_L^3 = \frac{1}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} E_{L3} + \frac{1}{r\Omega} H_{L1} \quad (۳-۲۹)$$

$$B_L^1 = \sqrt{1-r^2\Omega^2} H_{L1} + r\Omega D_L^3 \quad (۴-۲۹)$$

$$B_L^2 = \frac{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}{r^2} H_{L2} \quad (۵-۲۹)$$

$$B_L^3 = \sqrt{1-r^2\Omega^2} H_{L3} - r\Omega D_L^1 \quad (۶-۲۹)$$

روابط ساختاری بر اساس معادله $F(D, H)_{ij} = F(E, B)_{ij}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_L^1 = \frac{1}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} E_{L1} - \frac{1}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} H_{L3} \quad (۱-۲۹)$$

$$D_L^2 = \frac{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}{r^2} E_{L2} \quad (۲-۲۹)$$

۴- روابط ساختاری برای ناظر چرخان غیرمرکزی

همانطور که در [۲۳ و ۲۴] نشان داده است، استفاده از تبدیلات گالیله‌ای دوران برای ناظری که در فاصله شعاعی ثابتی نسبت به محور دوران با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω در حال چرخش است با مشکلات متعددی روبه روست. در این تبدیلات موقعیت ناظر و رویداد از هم مجزا نمی‌شود و از این رو تعبیر سینماتیکی سازگاری برای تبدیلات وجود ندارد. مطلق بودن زمان باعث می‌شود که توجیه پدیده‌هایی مثل اثر دوپلر عرضی و اتساع زمان ممکن نباشد و توجیه اثر سانا و تقدیم توماس از روی متریک ناظر چرخان هم با ناسازگاری همراه است. این تبدیلات فقط برای حالتی که ناظر حرکت انتقالی نداشته باشد و تنها حول خودش چرخش اسپینی داشته باشد قابل کاربرد است. بنابراین، در [۲۲ و ۲۳] تبدیلات فرانکلین تعمیم یافته بین ناظر چرخان (S) غیرمرکزی و ناظر اینرسی (S') به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$t = \cosh(R\Omega) t' - \frac{R}{c} \sinh(R\Omega) \varphi' ;$$

$$r = r'$$

$$\varphi = \cosh(R\Omega) \varphi' - \frac{c}{R} \sinh(R\Omega) t' ; \quad (31)$$

$$z = z'$$

که در آن R موقعیت شعاعی ناظر غیرمرکزی و Ω سرعت زاویه‌ای یکنواخت دوران است. اگر از شکل دیفرانسیلی معکوس تبدیلات فرانکلین استفاده کنیم، با جایگزین کردن آن در متریک فضا زمان ناظر اینرسی و با فرض $\beta = R\Omega$ داریم

$$ds^2 = \cosh^2 \beta \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \tanh^2 \beta \right) dt^2 - dr^2$$

$$- r^2 \cosh^2 \beta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \tanh^2 \beta \right) d\varphi^2$$

$$+ 2R \sinh \beta \cosh \beta \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) dt d\varphi - dz^2 \quad (32)$$

برای به دست آوردن روابط ساختاری برای ناظر چرخان غیرمرکزی که از تبدیلات فرانکلین تعمیم یافته استفاده می‌کند، از روش اولی که در بخش دوم معرفی شد استفاده می‌کنیم. ابتدا بر اساس (۳۲) داریم:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \cosh^2 \beta - \frac{r^2}{R^2} \sinh^2 \beta & 0 & R \sinh \beta \cosh \beta \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ R \sinh \beta \cosh \beta \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) & 0 & -r^2 \cosh^2 \beta + R^2 \sinh^2 \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} \cosh^2 \beta - \frac{R^2}{r^2} \sinh^2 \beta & 0 & \frac{R^2 - r^2}{r^2 R} \sinh \beta \cosh \beta & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{R^2 - r^2}{r^2 R} \sinh \beta \cosh \beta & 0 & \frac{\sinh^2 \beta}{R^2} - \frac{\cosh^2 \beta}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

و روابط ساختاری بر اساس معادله $F(D, H)^{ij} = F(E, B)^{ij}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_L^1 = \sqrt{1 - r^2 \Omega^2} E_{L1} - r \Omega B_L^3 \quad (1-30)$$

$$D_L^2 = \frac{\sqrt{1 - r^2 \Omega^2}}{r^2} E_{L2} \quad (2-30)$$

$$D_L^3 = \sqrt{1 - r^2 \Omega^2} E_{L3} + r \Omega B_L^1 \quad (3-30)$$

$$B_L^1 = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2 \Omega^2}} H_{L1} + \frac{r \Omega}{\sqrt{1 - r^2 \Omega^2}} E_{L3} \quad (4-30)$$

$$B_L^2 = \frac{\sqrt{1 - r^2 \Omega^2}}{r^2} H_{L2} \quad (5-30)$$

$$B_L^3 = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2 \Omega^2}} H_{L3} - \frac{r \Omega}{\sqrt{1 - r^2 \Omega^2}} E_{L1} \quad (6-30)$$

معادلات اخیر یعنی دسته معادلات (۱-۳۰) تا (۶-۳۰) دقیقاً معادلاتی است که در [۱۷] ارائه شده است. از طرفی به راحتی می‌توان دید که دسته معادلات (۲۹) و (۳۰) یکسان است. به عنوان مثال اگر در (۱-۳۰) به جای B_L^3 از (۶-۲۹) جای گذاری کنیم رابطه (۱-۲۹) و اگر در (۶-۲۹) به جای D_L^1 از (۱-۳۰) جای گذاری کنیم (۶-۳۰) به دست می‌آید. بنابراین، به صورت صریح نشان داده شد که نتیجه استفاده از معادله $F(D, H)^{ij} = F(E, B)^{ij}$ و معادله $F(D, H)_{ij} = F(E, B)_{ij}$ برای به دست آوردن روابط ساختاری یکسان است.

ارتباط بین روابط ساختاری در روش اول یعنی روابط (۲۸-۱) تا (۶-۲۸) با روابط ساختاری در روش دوم یعنی دسته معادلات (۲۹) و (۳۰) هم واضح است. روابط (۱-۲۸) تا (۳-۲۸) در روش اول با روابط (۱-۲۹) تا (۳-۲۹) و روابط (۴-۲۸) تا (۶-۲۸) در روش اول با روابط (۴-۳۰) تا (۶-۳۰) کاملاً یکسان است. البته باید توجه داشت که ارتباط بین مولفه‌های اندیس بالا و اندیس پایین برای میدان‌های سه بعدی معرفی شده از طریق متریک γ برقرار می‌شود. به عنوان مثال در این بخش با توجه به (۲۶) داریم:

$$E^1 = \gamma^{1\alpha} E_\alpha = E_1 ,$$

$$E^2 = \gamma^{2\alpha} E_\alpha = \frac{1 - r^2 \Omega^2}{r^2} E_2 ,$$

$$E^3 = \gamma^{3\alpha} E_\alpha = E_3$$

گالیله‌ای که در بخش قبل معرفی شد یعنی روابط (۲۸-۱) تا (۲۸-۶) تبدیل می‌شوند.

۵- نتیجه‌گیری

شکل سه‌بعدی روابط ساختاری الکترومغناطیس برای ناظرهای غیراینرسی، به طور خاص در حوزه مهندسی برق، مورد توجه بوده است. در عین حال نمایش‌های متفاوت و بعضاً ابهام برانگیزی برای این معادلات در مقالات این حوزه مشاهده می‌شود. در این مقاله با هدف رفع ابهام، نمایش‌های متفاوت از شکل سه‌بعدی روابط ساختاری در چارچوب ناظر چرخان گالیله‌ای با استفاده از فرمالیسم لاندائو با جزئیات کامل بیان شده است. همچنین ارتباط بین نمایش‌های مختلف روابط ساختاری سه‌بعدی توضیح داده شده است. با توجه به اهمیت آزمایشگاهی ناظر چرخان غیرمرکزی، روابط ساختاری الکترومغناطیس برای ناظر چرخان غیرمرکزی هم ارائه شده است. این نتایج می‌تواند برای کاربردهایی مانند بررسی انتشار موج الکترومغناطیسی در چارچوب مرجع چرخان یا بررسی فضا زمان ناظر چرخان به‌عنوان یک محیط اپتیکی مورد استفاده قرار گیرد.

۶- مراجع

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, "The classical theory of fields," Pergamon Press, Oxford, Ch 10, 1975.
- [2] J. Plebanski, "Electromagnetic waves in gravitational fields," Phys. Rev. Vol. 118, pp. 1396-1407, 1960
- [3] F. de Felice, "On the gravitational field acting as an optical medium," General Relativity and Gravitation, Vol. 2, pp. 347-357, 1971
- [4] B. Mashhoon, "Scattering of Electromagnetic Radiation from a Black hole," Physical Review D, Vol. 7, pp. 2087-2814, 1973.
- [5] B. Mashhoon, "Can Einstein's theory of gravitation be tested beyond the geometrical optics limit?," Nature Vol. 250, pp. 316-317, 1974.
- [6] A. M. Volkov, A. A. Izmet'ev and G. V. Skrotskii, "The propagation of electromagnetic waves in a Riemannian space," Sov. Phys. JETP, Vol. 32, pp. 686-689, 1971.
- [7] A. Besharat, M. Miri and M. Nouri-Zonoz, "Optical Aharonov-Bohm effect due to toroidal moment inspired by general relativity," J. Phys. Commun, Vol. 3, pp. 115019-115028, 2019.
- [8] Tse. Chin. Mo, "Theory of Electrodynamics in Media in Noninertial Frames and Applications," J. Math. Phys. Vol. 11, pp. 2589-2610, 1970.
- [9] G. C. Scorgie, "Theory of Electrodynamics in Media in Noninertial Frames and Applications," J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 23, pp. 5169-5184, 1990.
- [10] R. H. Tyler and L. A. Mysak, "Theory of Electrodynamics in Media in Noninertial Frames and

و با استفاده از (۱) و (۶) داریم:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2 r^2}{R^2 \cosh^2 \beta - r^2 \sinh^2 \beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\gamma^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cosh^2 \beta}{r^2} - \frac{\sinh^2 \beta}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$g = -r^2, \quad \gamma = \frac{r^2}{\cosh^2 \beta - \frac{R^2}{r^2} \sinh^2 \beta}$$

مانند بخش قبل با استفاده از روابط بالا و از روابط (۱۸) و (۲۲) خواهیم داشت:

$$D_{L1} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \beta - \frac{r^2}{R^2} \sinh^2 \beta}} E_{L1}$$

$$+ \frac{(R^2 - r^2) \sinh \beta \cosh \beta}{rR \sqrt{\cosh^2 \beta - \frac{r^2}{R^2} \sinh^2 \beta}} H_{L3}$$

$$D_{L2} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \beta - \frac{r^2}{R^2} \sinh^2 \beta}} E_{L2}$$

$$D_{L3} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \beta - \frac{r^2}{R^2} \sinh^2 \beta}} E_{L3}$$

$$- \frac{(R^2 - r^2) \sinh \beta \cosh \beta}{rR \sqrt{\cosh^2 \beta - \frac{r^2}{R^2} \sinh^2 \beta}} H_{L1}$$

$$B_{L1} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \beta - \frac{r^2}{R^2} \sinh^2 \beta}} H_{L1}$$

$$- \frac{(R^2 - r^2) \sinh \beta \cosh \beta}{rR \sqrt{\cosh^2 \beta - \frac{r^2}{R^2} \sinh^2 \beta}} E_{L3}$$

$$B_{L2} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \beta - \frac{r^2}{R^2} \sinh^2 \beta}} H_{L2}$$

$$B_{L3} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \beta - \frac{r^2}{R^2} \sinh^2 \beta}} H_{L3}$$

$$+ \frac{(R^2 - r^2) \sinh \beta \cosh \beta}{rR \sqrt{\cosh^2 \beta - \frac{r^2}{R^2} \sinh^2 \beta}} E_{L1}$$

به راحتی می‌توان دید که این روابط برای حالت $R \rightarrow 0$ یعنی برای ناظر مرکزی، به روابط ساختاری مربوط به ناظر چرخان

- [18] J. Van. Bladel, "Electromagnetic Fields," John Wiley and Sons, Second Edition, Ch 17, 2007.
- [19] J. C. Hauck, and B. Mashhoon, "Electromagnetic waves in a rotating frame of reference," *Ann. Phys.* Vol. 12, pp. 275-288, 2003.
- [20] G. V. Skrotskii, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, Vol. 114, pp. 73-76, 1957.
- [21] G. F. R. Ellis, R. Maartens and M. A. H. Maccallum, "Relativistic Cosmology," Cambridge University Press, 2012.
- [22] H. Ramezani-Aval, "The relation between different definitions of electromagnetic field tensor and Maxwell's equations in stationary spacetimes," *Indian. J. Phys*, Vol. 39, 2022.
- [23] M. Nouri-Zonoz, H. Ramezani-Aval and R. Gharechahi, "On Franklin's relativistic rotational transformation and its modification," *Eur. Phys. J. C* Vol. 74, 3098, 2014.
- [24] M. Nouri-Zonoz and H. Ramezani-Aval, "Fermi coordinates and modified Franklin transformation: a comparative study on rotational phenomena," *Eur. Phys. J. C*, Vol. 74, 3128, 2014.
- Applications," *Can. J. Phys*, Vol. 73, pp. 393-402, 1995.
- [11] G. F. T. del Castillo, and J. Mercado-Perez, "Three-dimensional formulation of the Maxwell equations for stationary space-times," *J. Math. Phys*, Vol. 40, pp. 2882-2890, 1999.
- [12] T. Shiozawa, "Phenomenological and electron-theoretical study of the electrodynamics of rotating systems," *Proc. IEEE*, Vol.61, pp.1694-1702, 1973.
- [13] A. Georgiou, "The electromagnetic field in rotating coordinates," *Proc. IEEE*, Vol. 76, pp. 1051-1052, 1988.
- [14] P. Hillion, "Relativistic electromagnetism in rotating media," *Turk. J. Elec. Eng*, Vol. 18, pp. 281, 2010.
- [15] J. Van. Bladel, "Electromagnetic fields in the presence of rotating bodies," *Proc. IEEE*, Vol. 64, pp.301-318, 1976.
- [16] J. Van. Bladel, "Rotating dielectric sphere in a low-frequency field," *Proc. IEEE*, Vol. 67, pp.1654-1655, 1979.
- [17] J. Van. Bladel, "Relativity and Engineering," Berlin: Springer, Ch 9, 1984.