Scientific Journal of Applied Electromagnetics
Vol. 11, No.2, 2023 (Serial No. 27)

Electromagnetic Constitutive Relations in Eccentric Rotating Frames

H.Ramezani-Aval
* Department of Physics, University of Gonabad, Gonabad, Iran.
(Received: 2023/04/30; Accepted: 2023/07/27)

Abstract

In this article, while analytically reviewing the Landau formalism for electrodynamic equations in the presence of a gravitational field, we show that the three-dimensional electromagnetic constitutive relations in this formalism can be expressed by two equivalent methods .Then we obtain the constitutive relations for the Galilean rotating observer with both methods and show its compatibility with the previous results. We also present the electromagnetic constitutive relations for an eccentric rotating observer. To solve some ambiguities, especially in the articles related to this topic in the field of electrical engineering, different representations of the three-dimensional form of constitutive relations in the Galilean rotating observer's frame are expressed in full detail. Also, the connection between different representations of three-dimensional constitutive relations will be explained. In the end, considering the practical and experimental importance of the eccentric rotating observer, we will obtain the electromagnetic constitutive relations for this particular observer.

Keywords : Electromagnetic constitutive relations; Landau formalism; Eccentric rotating observe

نشریه علمی «الکترومغناطیس کاربردی»
سال یازدهم، شماره ۲، پاییز و زمستان ۱۴۰۲؛ ص ۷۷- ۶۹
علمی – پژوهشی

روابط ساختاری الکترومغناطیس در چارچوب ناظر چرخان غیرمرکزی

حسین رمضانی اول
استادیار، گروه فیزیک، مجتمع آموزش عالی گناباد، گناباد، ایران
(دریافت: ۱۴۰۲/۰۲/۱۰، پذیرش: ۱۴۰۲/۰۵/۰۵)

چکیده

در این مقاله ضمن مرور تحلیلی فرمالیزم لاندائو برای معادلات الکترودینامیکی در حضور میدان گرانشی، نشان می‌دهیم که روابط ساختاری سه‌بعدی الکترومغناطیس در این فرمالیزم را با دو روش هم‌ارز می‌توان بیان کرد. در ادامه روابط ساختاری برای ناظر چرخان گالیله‌ای را با هر دو روش به دست آورده و انطباق آن با نتایج قبلی را نشان می‌دهیم. همچنین روابط ساختاری الکترومغناطیس را برای ناظر چرخان غیرمرکزی ارائه می‌دهیم. با هدف رفع برخی ابهام‌ها مخصوصاً در مقالات مربوط به این موضوع در حوزه مهندسی برق، نمایش‌های متفاوت از شکل سه‌بعدی روابط ساختاری در چارچوب ناظر چرخان گالیله‌ای با استفاده از فرمالیزم لاندائو با جزئیات کامل بیان می‌شود. همچنین ارتباط بین نمایش‌های مختلف روابط ساختاری سه‌بعدی توضیح داده خواهد شد. در پایان با توجه به اهمیت کاربردی و آزمایشگاهی ناظر چرخان غیرمرکزی، روابط ساختاری الکترومغناطیس را برای این ناظر خاص به دست خواهیم آورد.

کلیدواژه‌ها: روابط ساختاری الکترومغناطیس، فرمالیزم لاندائو، ناظر چرخان غیرمرکزی

۱- مقدمه

معادلات الکترودینامیکی در حضور میدان گرانشی در غیاب ماده، در شکل ظاهری با معادلات الکترودینامیکی در فضا - زمان تخت در محیطی شامل ماده‌ای با ویژگی‌های الکترومغناطیسی مطابقت دارد. بر این اساس می‌توان انتظار داشت که ویژگی‌های الکترومغناطیسی و اپتیکی متناظر با یک فضا زمان ریمانی را بتوان بر حسب کمیت‌هایی که از روی مولفه‌های متریک ساخته می‌شوند بیان کرد. این ایدهٔ جذاب هم ارزیِ بین گرانش و محیط اپتیکی که در آغاز توسط خود انیشتین مطرح شده بود، ابتدا در [۱] مورد استفاده قرار گرفت. لاندائو و لیفشیتز با استخراج اصل فرما و به دست آوردن روابط ساختاری[1] در حضور یک میدان گرانشی، ضریب شکست اپتیکی، گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی را بر حسب مولفه‌های متریک برای یک میدان گرانشیِ پایا[2] بیان می‌کنند. در [۲]، پلبانسکی معادلات ماکسول در نظریه نسبیت عام را متناظر با الکترودینامیک در محیط ماکروسکوپی فرمول‌بندی می‌کند و تانسورهای سه‌بعدی گذردهی الکتریکی، تراوایی مغناطیسی و الکترومغناطوگرانشی[3] را معرفی می‌کند. در ادامه در [۳] نشان داده می‌شود که تناظر بین محیط مادی و گرانش می‌تواند به‌عنوان یک روش تحقیق مناسب مورد استفاده قرار گیرد. سپس این ایده برای مسئله انتشار موج الکترومغناطیسی در میدان گرانشی مورد استفاده قرار می‌گیرد [۴-۶]؛ در این کارها مسئلهٔ انتشار موج گرانشی در فضا زمان ریمانی به مسئلهٔ انتشار این موج در محیط دوگانه-ناهمسان‌گرد[4] فروکاسته می‌شود. تناظر گرانشی ضریب شکست یک محیط مغناطوالکتریکی[5] هم در ادامه در [۶] و اخیراً هم به‌عنوان نمونه در [۷] مورد بررسی قرار گرفته است.

از طرف دیگر، الکترودینامیک چارچوب‌های غیر اینرسی از جمله چارچوب ناظر چرخان به‌خاطر جنبه‌های کاربردی آن، به طور خاص در مهندسی برق، مورد توجه بوده است[۸-۱۸]. در همین راستا شکل سه‌بعدی معادلات ماکسول و روابط ساختاری در چارچوب چرخان در [۱۴-۱۸] مورد بررسی قرار گرفته است. با کمک‌گرفتن از اصل هم‌ارزی می‌توان انتظار داشت که از تناظری که بین میدان گرانشی و محیط مادی وجود دارد و در پاراگراف قبل از آن صحبت شد، بتوان برای چارچوب‌های غیراینرسی از جمله چارچوب چرخان هم استفاده کرد. به‌عنوان نمونه در [۱۹] انتشار موج الکترومغناطیسی در چارچوب مرجع چرخان یکنواخت با استفاده از روابط ساختاری که با روش فوق به دست آمده مورد مطالعه قرار گرفته است. در عین حال نمایش‌های متفاوتی از روابط ساختاری در این کارها مشاهده می‌شود.

هدف این مقاله این است که جهت رفع برخی ابهام‌ها، مخصوصاً در مقالات مربوط به این موضوع در حوزه مهندسی برق، نمایش‌های متفاوت از شکل سه‌بعدی روابط ساختاری در

* رایانامه نویسنده مسئول: Hramezania@alumni.ut.ac.ir

[1] Constitutive Relations
[2] Stationary
[3] Gravitoelectromagnetic
[4] Bi-anisotropic
[5] Magnetoelectric

چارچوب ناظر چرخان گالیله‌ای با استفاده از فرمالیزم لاندائو با جزئیات کامل بیان شود. همچنین ارتباط بین نمایش‌های مختلف روابط ساختاری سه‌بعدی توضیح داده خواهد شد. در پایان با توجه به اهمیتی که ناظر چرخان غیرمرکزی به لحاظ کاربردی و آزمایشگاهی دارد، روابط ساختاری الکترومغناطیس را برای ناظر چرخان غیرمرکزی به دست خواهیم آورد. لازم به تأکید است که بر خلاف اکثر مراجع معرفی شده در بالا که از فرمالیزم معرفی شده در [۲۰] برای نمایش معادلات ماکسول و روابط ساختاری استفاده کرده‌اند، در اینجا ما از فرمایزم لاندائو استفاده خواهیم کرد. این دو فرمالیزم در برخی ضرایب با هم تفاوت دارند.

در بخش دوم این مقاله فرمالیزم لاندائو برای معرفی معادلات ماکسول و روابط ساختاری ارائه و برخی روابط آن با جزئیات بیشتری اثبات می‌شود. همچنین در این بخش نشان می‌دهیم که روابط ساختاری سه‌بعدی الکترومغناطیسی را در این فرمالیزم با دو روش هم‌ارز می‌توان به دست آورد. در بخش سوم روابط ساختاری را برای ناظر چرخان گالیله‌ای به دست آورده و انطباق آن با نتایج قبلی را نشان می‌دهیم. در بخش چهارم روابط ساختاری الکترومغناطیس را برای ناظر چرخان غیرمرکزی ارائه می‌دهیم.

در این متن، S' و مختصه‌های پریم دار برای چارچوب اینرسی ساکن آزمایشگاه و S و مختصه‌های بدون پریم برای چارچوب چرخان استفاده خواهد شد. حروف لاتین (i,j,k) از ۰ تا ۳ و حروف یونانی (μ,ν) از ۱ تا ۳ تغییر می‌کنند. سرعت نور را $c=1$ می‌گیریم و از نشانگان $(+,-,-,-)$ استفاده می کنیم.

۲- روابط ساختاری الکترومغناطیس در فرمالیزم لاندائو

۲-۱- رهیافت لاندائو برای جداسازی فضا زمان

در رهیافت ۱+۳ (نخ نخ کردن[1]) برای جداسازی فضا زمان [۲۱]، تصویرسازی نسبت به یک بردار مماس زمان‌گونه u^μ انجام می‌شود. در فضا زمان مانا[2] u^μ بر ابر سطح $t=cte$ عمود است ولی در فضا زمان پایا اینگونه نیست. بنابراین، تمایز مهم این نوع جداسازی با جداسازی ۳+۱ (ورقه ورقه کردن[3]) در همین‌جا آشکار می‌شود. در ۱+۳ نیازی به تعریف ابرسطح و بردار عمود بر آن نیست و جداسازی بر اساس بردار مماس بر منحنی مسیر ناظر یا همان بردار سرعت ناظر انجام می‌شود و تانسور تصویر به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

[1] Threading
[2] Static
[3] Slicing

$$h_{ij}=g_{ij}+u_iu_j$$

واضح است که این تعریف وابسته به ناظر است. اگر u_i سرعت ناظر همراه عمومی[4] یعنی $u_i=\frac{1}{\sqrt{g_{..}}}\delta_i^{\cdot}$ باشد در این صورت خواهیم داشت

$$h_{..}=0\ ,\ \ h_{.i}=0\ ,\qquad h_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}=\left(-g_{\alpha\beta}+\frac{g_{.\alpha}g_{.\beta}}{g_{..}}\right)\tag{۱}$$

که $\gamma_{\alpha\beta}$ همان تانسور فضایی است که در [۱] بر اساس یک فرآیند فیزیکی از طریق ارسال و دریافت یک سیگنال نوری بین دو نقطه‌ی بی‌نهایت نزدیک و تعریف طول فضایی بر اساس آن به دست آمده است. بنابراین، می‌توان گفت آنچه در [۱] ارائه شده است حالت خاصی از جداسازی ۳+۱ است. ما از این روش به نام «فرمالیزم لاندائو» یاد می‌کنیم و جزئیات و برخی نتایج آن را که به موضوع این مقاله مربوط می‌شود در ادامه بیان می‌کنیم. در این فرمالیزم متریک فضا زمان پایا به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$ds^2=g_{..}\left(dx^0-g_\alpha dx^\alpha\right)^2-\gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta\tag{۲}$$

که در آن که $\gamma_{\alpha\beta}$ همان تانسور فضایی سه‌بعدی است که در (۱) معرفی شد و ویژگی‌های هندسی فضای واقعی را تعیین می‌کند. همچنین

$$g_\alpha=-\frac{g_{.\alpha}}{g_{..}}\tag{۳}$$

برداری در فضای با متریک سه‌بعدی $\gamma_{\alpha\beta}$ است که بردار پتانسیل مغناطوگرانشی نامیده می‌شود. با توجه به اینکه $g^{ik}g_{kl}=\delta_l^i$ ، داریم:

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}+g^{\alpha\cdot}g_{.\gamma}=\delta_\gamma^\alpha\ ,\qquad g^{\alpha\beta}g_{\beta.}+g^{\alpha\cdot}g_{..}=\delta_.^\alpha=0\tag{۴}$$

بنابراین، با تعیین $g^{\alpha\cdot}$ از معادله دوم در (۴) و جای‌گذاری آن در اولی خواهیم داشت:

$$-g^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma}=\delta_\gamma^\alpha\tag{۵}$$

و بنابراین، $-\gamma_{\beta\gamma}$ معکوس $g^{\alpha\beta}$ است یا به طور معادل:

$$\gamma^{\alpha\beta}=-g^{\alpha\beta}\tag{۶}$$

یادآوری می‌کنیم که:

[4] General Comoving Observer

$$g_{..} = \frac{cofactor\left(g^{..}\right)}{det(g^{ij})} \qquad (۷)$$

بنابراین، با استفاده از روابط (۵) تا (۷) می‌توانیم نشان دهیم که دترمینان‌های g و γ که به ترتیب متناظر با g_{ij} و $\gamma_{\alpha\beta}$ هستند، به‌صورت زیر به هم مرتبطند:

$$g = -g_{..}\gamma \qquad (۸)$$

با استفاده از (۶) و معادله دوم در (۴) می‌توانیم مولفه‌های پادوردای $\boldsymbol{g}$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$g^{\alpha} = -g^{\cdot\alpha} \qquad (۹)$$

۲-۲- شکل سه‌بعدی میدان‌های الکترودینامیک در فرمالیزم لاندائو

لاندائو و لیفشیتز [۱] شکل سه‌بعدی میدان‌های الکترومغناطیسی را به‌صورت زیر ارائه می‌دهند:

$$E_{L_i} = F_{\cdot i} \ , \qquad D_L^i = -\sqrt{g_{..}}F^{\cdot i},$$

$$B_{ij} = F_{ij} \ , \qquad H^{ij} = \sqrt{g_{..}}F^{ij},$$

$$B_L^i = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}e^{ijk}B_{jk} \ ,$$

$$H_{L_i} = -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}e_{ijk}H^{jk} \qquad (۱۰)$$

که در آن به‌عنوان مثال E_L و B_L بردارهایی هستند که در سه بعد تعریف می‌شوند و اندیس L نشان می‌دهد که مربوط به فرمالیزم لاندائو هستند. لازم به ذکر است که با مقایسه‌ی تانسور میدان لاندائو با تانسور میدانی که با کمک تتراد مختصاتی[۱] به دست می‌آید، می توان میدان های لاندائو را بر حسب مولفه‌های مختصاتی یا غیرمختصاتیِ (فیزیکیِ) میدان تعریف کرد [۲۲]. ضمنا برای ماتریس لوی-چویتای سه‌بعدی داریم $e^{۱۲۳} = ۱ = e_{۱۲۳}$ و علامت تحت جابجایی اندیس‌ها تغییر می‌کند.

می‌دانیم که بردار $\boldsymbol{c}$ را می‌توان به‌صورت بردار دوگان تانسور پادمتقارن $c_{\alpha\beta}$ به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$c_{\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\, e_{\alpha\beta\gamma}B^{\beta\gamma} \ \ , \ \ c^{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}e^{\alpha\beta\gamma}c_{\beta\gamma}$$

و برعکس:

$$c_{\alpha\beta} = \sqrt{\gamma}e_{\alpha\beta\gamma}c^{\gamma} \ \ , \ \ c^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}e^{\alpha\beta\gamma}c_{\gamma}$$

[1] Coordinate tetrad

با استفاده از این روابط و تعریف‌های (۱۰) تانسورهای میدان را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$F(E,B)_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & E_{L_1} & E_{L_2} & E_{L_3} \\ -E_{L_1} & 0 & -\sqrt{\gamma}B_L^3 & \sqrt{\gamma}B_L^2 \\ -E_{L_2} & \sqrt{\gamma}B_L^3 & 0 & -\sqrt{\gamma}B_L^1 \\ -E_{L_3} & -\sqrt{\gamma}B_L^2 & \sqrt{\gamma}B_L^1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۱)$$

و

$$F(D,H)^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{D_L^1}{\sqrt{g_{..}}} & -\frac{D_L^2}{\sqrt{g_{..}}} & -\frac{D_L^3}{\sqrt{g_{..}}} \\ \frac{D_L^1}{\sqrt{g_{..}}} & 0 & -\frac{H_{L_3}}{\sqrt{-g}} & \frac{H_{L_2}}{\sqrt{-g}} \\ \frac{D_L^2}{\sqrt{g_{..}}} & \frac{H_{L_3}}{\sqrt{-g}} & 0 & -\frac{H_{L_1}}{\sqrt{-g}} \\ \frac{D_L^3}{\sqrt{g_{..}}} & -\frac{H_{L_2}}{\sqrt{-g}} & \frac{H_{L_1}}{\sqrt{-g}} & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

۳-۲- روابط ساختاری سه‌بعدی در فرمالیزم لاندائو

برای به دست آوردن روابط ساختاری در این فرمالیزم به دو روش می‌توان عمل کرد:

روش اول: با استفاده از تعریف‌های ارائه شده در روابط (۱۰) اولین رابطه ساختاری را به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} E_{L_\alpha} &= g_{\cdot l}g_{\alpha m}F^{lm} \\ &= g_{..}g_{\alpha\beta}F^{\cdot\beta} \\ &+ g_{\cdot\lambda}g_{\alpha\cdot}F^{\lambda\cdot} \\ &+ g_{\cdot\lambda}g_{\alpha\delta}F^{\lambda\delta} \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

جمله اول سمت راست (۱۳):

$$\begin{aligned} g_{..}g_{\alpha\beta}F^{\cdot\beta} &= g_{00}\left(-\gamma_{\alpha\beta} + \frac{g_{\cdot\alpha}g_{0\beta}}{g_{..}}\right)F^{\cdot\beta} \\ &= \sqrt{g_{..}}\gamma_{\alpha\beta}D_L^{\beta} + g_{\cdot\alpha}g_{\cdot\beta}F^{\cdot\beta} \\ &= \sqrt{g_{..}}D_{L_\alpha} + g_{\cdot\alpha}g_{\cdot\beta}F^{\cdot\beta} \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

جمله دوم سمت راست (۱۳):

$$g_{\cdot\lambda}g_{\alpha\cdot}F^{\lambda\cdot} = -g_{0\alpha}g_{0\beta}F^{0\beta} \qquad (۱۵)$$

جمله سوم سمت راست (۱۳):

$$\begin{aligned}
g_{0\lambda}g_{\alpha\delta}F^{\lambda\delta} &= g_{0\lambda}\left(-\gamma_{\alpha\delta}+\frac{g_{0\alpha}g_{0\delta}}{g_{00}}\right)\frac{H^{\lambda\delta}}{\sqrt{g_{00}}}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}g_{0\lambda}\gamma_{\alpha\delta}H^{\lambda\delta}\\
&\quad+\frac{1}{g_{00}\sqrt{g_{00}}}g_{0\alpha}g_{0\lambda}g_{0\delta}H^{\lambda\delta}\\
&= \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}g_{0\lambda}\gamma_{\alpha\delta}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}e^{\lambda\delta\theta}H_{L_\theta}\\
&= -\sqrt{g_{00}}\gamma_{\alpha\delta}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}e^{\lambda\delta\theta}g_\lambda H_{L_\theta}
\end{aligned}$$

از طرف دیگر در مختصات خمیده سه‌بعدی، مولفه‌های بردار $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
c_\alpha &= \sqrt{\gamma}\; e_{\alpha\beta\gamma}a^\beta b^\gamma \quad ,\\
c^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\; e^{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma
\end{aligned} \tag{۱۶}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
g_{0\lambda}g_{\alpha\delta}F^{\lambda\delta} &= \sqrt{g_{00}}\gamma_{\alpha\delta}(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{H_L})^\delta\\
&= \sqrt{g_{00}}(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{H_L})_\alpha
\end{aligned} \tag{۱۷}$$

با جای‌گذاری (۱۴)، (۱۵) و (۱۷) در (۱۳) خواهیم داشت:

$$D_{L_\alpha} = \frac{E_{L_\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} + (\boldsymbol{H_L}\times\boldsymbol{g})_\alpha \tag{۱۸}$$

که اولین رابطه ساختاری در فرمالیزم لاندائو است.

برای به دست آوردن دومین رابطه ساختاری هم به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
H_L^\alpha &= \gamma^{\alpha\beta}H_{L_\beta} = \gamma^{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\; e_{\beta\gamma\lambda}H^{\gamma\lambda}\right)\\
&= \gamma^{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\; e_{\beta\gamma\lambda}\sqrt{g_{00}}F^{\gamma\lambda}\right)\\
&= \gamma^{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\; e_{\beta\gamma\lambda}\sqrt{g_{00}}\right)\left(g^{\gamma l}g^{\lambda n}F_{ln}\right)\\
&= \gamma^{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\; e_{\beta\gamma\lambda}\sqrt{g_{00}}\right)\left(g^{\gamma 0}g^{\lambda\delta}F_{0\delta}\right.\\
&\quad\left.+g^{\gamma\theta}g^{\lambda 0}F_{\theta 0}+g^{\gamma\theta}g^{\lambda\Omega}F_{\theta\Omega}\right)
\end{aligned} \tag{۱۹}$$

با استفاده از $\gamma^{\alpha\beta}=-g^{\alpha\beta}$ و $F_{0\alpha}=E_{L_\alpha}$ و $g^\alpha=-g^{0\alpha}$، دو جمله اول در خط آخر (۱۹) را می‌توان به اینصورت نوشت:

$$\begin{aligned}
&\gamma^{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\; e_{\beta\gamma\lambda}\sqrt{g_{00}}\right)\left(g^{\gamma 0}g^{\lambda\delta}F_{0\delta}+g^{\gamma\theta}g^{\lambda 0}F_{\theta 0}\right)\\
&= \sqrt{g_{00}}\gamma^{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\; e_{\beta\gamma\lambda}\right)\left(E_L^\lambda g^\gamma - E_L^\gamma g^\lambda\right)\\
&= \sqrt{g_{00}}\gamma^{\alpha\beta}(\boldsymbol{E_L}\times\boldsymbol{g})_\beta
\end{aligned} \tag{۲۰}$$

$$= \sqrt{g_{00}}(\boldsymbol{E_L}\times\boldsymbol{g})^\alpha$$

و جمله سوم در خط آخر (۱۹):

$$\begin{aligned}
&\gamma^{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\; e_{\beta\gamma\lambda}\sqrt{g_{00}}\right)g^{\gamma\theta}g^{\lambda\Omega}F_{\theta\Omega}\\
&= \gamma^{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\; e_{\beta\gamma\lambda}\sqrt{g_{00}}\right)\gamma^{\gamma\theta}\gamma^{\lambda\Omega}B_{\theta\Omega}\\
&= \gamma^{\alpha\beta}\sqrt{g_{00}}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\; e_{\beta\gamma\lambda}B^{\gamma\lambda}\right)\\
&\qquad= \gamma^{\alpha\beta}\sqrt{g_{00}}B_{L_\beta} = \sqrt{g_{00}}B_L^\alpha
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

بنابراین، با جای‌گذاری (۲۰)و (۲۱) در (۱۹) خواهیم داشت:

$$B_L^\alpha = \frac{H_L^\alpha}{\sqrt{g_{00}}} + (\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{E_L})^\alpha \tag{۲۲}$$

که دومین رابطه ساختاری در فرمالیزم لاندائو است.

روش دوم: با استفاده از تعریف‌های (۱۱) و (۱۲) برای تانسور میدان، روابط ساختاری را می‌توان با کمک هر یک از دو رابطه زیر به دست آورد:

$$F(D,H)_{ij} = F(E,B)_{ij} \tag{۲۳}$$

و

$$F(D,H)^{ij} = F(E,B)^{ij} \tag{۲۴}$$

می‌توان نشان داد نتیجه استفاده از دو معادله فوق برای روابط ساختاری با یکدیگر و همچنین با آنچه از روش اول به دست آمد یکسان است. (البته باید توجه داشت که برای مشاهدهٔ تطابق کامل نیاز است که اندیس‌های بردارهای ۳ بعدی را با متریک فضایی γ و اندیس‌های تانسورهای ۴ بعدی را با متریک g بالا یا پایین ببریم.) به‌عنوان نمونه:

$$\begin{aligned}
&F(E,B)^{12} = g^{1i}g^{2j}F(E,B)_{ij}\\
&= g^{10}g^{2\alpha}F(E,B)_{0\alpha} + g^{1\alpha}g^{20}F(E,B)_{\alpha 0}\\
&+g^{1\alpha}g^{2\beta}F(E,B)_{\alpha\beta}\\
&= g^1\gamma^{2\alpha}E_{L_\alpha} + g^2\gamma^{1\alpha}\left(-E_{L_\alpha}\right) + \gamma^{1\alpha}\gamma^{2\beta}B_{\alpha\beta}\\
&= g^1E_L^2 - g^2E_L^1 + B^{12}\\
&= g^1E_L^2 - g^2E_L^1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}B_{L_3}
\end{aligned}$$

اکنون با استفاده از $F(E,B)^{12}=F(D,H)^{12}$ و تعریف ضرب برداری در (۱۶) داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\mathbf{g}\times\mathbf{E_L})_3 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}B_{L_3} = -\frac{H_{L_3}}{\sqrt{-g}}$$

در نتیجه:

$$B_{L_3} = \frac{H_{L_3}}{\sqrt{g_{00}}} + (\mathbf{g} \times \mathbf{E_L})_3$$

که مؤلفه سوم (۲۲) است. به‌عنوان یک مثال دیگر:

$$\begin{aligned} F(D,H)_{01} &= g_{0i}g_{1j}F(D,H)^{ij} \\ &= g_{00}g_{1\alpha}F(D,H)^{0\alpha} + g_{0\alpha}g_{10}F(D,H)^{\alpha 0} \\ &\quad + g_{0\alpha}g_{1\beta}F(D,H)^{\alpha\beta} \\ &= g_{00}\left(-\gamma_{1\alpha} + \frac{g_{01}g_{0\alpha}}{g_{00}}\right)\left(\frac{-D_L^{\alpha}}{\sqrt{g_{00}}}\right) \\ &\quad + g_{0\alpha}g_{10}F\left(\frac{D_L^{\alpha}}{\sqrt{g_{00}}}\right) \\ &\quad + g_{0\alpha}(-\gamma_{1\beta} + \frac{g_{01}g_{0\beta}}{g_{00}})\left(\frac{H^{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{00}}}\right) \\ &= \sqrt{g_{00}}D_{L_1} + \sqrt{g_{00}}\gamma_{1\beta}e^{\beta\alpha\gamma}g_{\alpha}H_{L_\gamma} \\ &= \sqrt{g_{00}}D_{L_1} + \sqrt{g_{00}}\gamma_{1\beta}(\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{H_L})^{\beta} \\ &= \sqrt{g_{00}}(D_{L_1} + (\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{H_L})_1) \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از $F(E,B)_{01} = F(D,H)_{01}$ داریم:

$$E_{L_1} = \sqrt{g_{00}}\left(D_{L_1} + (\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{H_L})_1\right)$$

و در نتیجه:

$$D_{L_1} = \frac{E_{L_1}}{\sqrt{g_{00}}} - (\mathbf{g} \times \mathbf{H_L})_1$$

که مؤلفه اول (۱۶) است. به این ترتیب نشان داده شد که دو روش ذکر شده در این بخش برای به دست آوردن روابط ساختاری معادل هم هستند و به نتایج یکسان منجر می‌شوند.

۳- روابط ساختاری برای ناظر چرخان گالیله‌ای

برای مقایسه با نتایج قبلی ابتدا به سراغ تبدیلات گالیله‌ای دوران می‌رویم و روابط ساختاری را در فضا زمان ناظر چرخان گالیله‌ای به دست می‌آوریم. تبدیلات گالیله‌ای در مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر است:

$$t = t', \quad r = r', \quad \varphi = \varphi' - \Omega t, \quad z = z'$$

در نتیجه متریک ناظر چرخان گالیله‌ای به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$ds^2 = (1 - r^2\Omega^2)dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi dt - dz^2 - r^2 d\varphi^2 - dr^2$$

بنابراین، داریم:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 - r^2\Omega^2 & 0 & -r^2\Omega & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -r^2\Omega & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad (۲۵)$$

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Omega & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & \frac{-1 + r^2\Omega^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

و با استفاده از (۱) و (۶) متریک سه‌بعدی فضایی متناظر با ناظر چرخان گالیله‌ای به‌صورت زیر است:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{1 - r^2\Omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 - r^2\Omega^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲۶)$$

بنابراین:

$$g = -r^2, \quad \gamma = \frac{r^2}{1 - r^2\Omega^2} \qquad (۲۷)$$

برای به دست آوردن روابط ساختاری متناظر با ناظر چرخان گالیله‌ای می‌توان از دو روشی که در بخش قبل اشاره شد استفاده کرد. چنان‌که در بخش قبل ذکر شد نتایج هر دو روش قابل تبدیل به یکدیگر است. ولی چون این نتایج در منابع مختلف به‌صورت متفاوت ذکر شده است، با هدف مقایسه و رفع ابهام، در اینجا نتایج هر دو روش را ارائه می‌دهیم.

در روش اول به طور مستقیم از روابط (۱۸) و (۲۲) استفاده می‌کنیم و با استفاده از (۳)، (۹) و (۱۶) و جای‌گذاری از (۲۵) و (۲۷) خواهیم داشت:

$$D_{L_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2\Omega^2}}E_{L_1} - \frac{r\Omega}{\sqrt{1 - r^2\Omega^2}}H_{L_3} \qquad (۱-۲۸)$$

$$D_{L_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2\Omega^2}}E_{L_2} \qquad (۲-۲۸)$$

$$D_{L_3} = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2\Omega^2}}E_{L_3} + \frac{r\Omega}{\sqrt{1 - r^2\Omega^2}}H_{L_1} \qquad (۳-۲۸)$$

$$B_{L_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2\Omega^2}}H_{L_1} + \frac{r\Omega}{\sqrt{1 - r^2\Omega^2}}E_{L_3} \qquad (۴-۲۸)$$

$$B_{L_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2\Omega^2}}H_{L_2} \qquad (۵-۲۸)$$

$$B_{L_3} = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2\Omega^2}}H_{L_3} - \frac{r\Omega}{\sqrt{1 - r^2\Omega^2}}E_{L_1} \qquad (۶-۲۸)$$

اما برای روش دوم با استفاده از روابط (۲۵) تا (۲۷) و تعریف‌های (۱۱) و (۱۲) تانسورهای میدان برای ناظر چرخان در فرمالیزم لاندائو به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$F(E,B)_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{E}_{L_1} & \mathrm{E}_{L_2} & \mathrm{E}_{L_3} \\ -\mathrm{E}_{L_1} & 0 & -\frac{r}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}B_L^3 & \frac{r}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}B_L^2 \\ -\mathrm{E}_{L_2} & \frac{r}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}B_L^3 & 0 & -\frac{r}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}B_L^1 \\ -\mathrm{E}_{L_3} & -\frac{r}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}B_L^2 & \frac{r}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}B_L^1 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$F(D,H)^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{D_L^1}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} & -\frac{D_L^2}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} & -\frac{D_L^3}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} \\ \frac{D_L^1}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} & 0 & -\frac{H_{L_3}}{r} & \frac{H_{L_2}}{r} \\ \frac{D_L^2}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} & \frac{H_{L_3}}{r} & 0 & -\frac{H_{L_1}}{r} \\ \frac{D_L^3}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}} & -\frac{H_{L_2}}{r} & \frac{H_{L_1}}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن روابط ساختاری با روش دوم با کمک (۲۳) و (۲۴)، ماتریس‌های فوق را به ترتیب با اندیس‌های بالا و پایین به دست می‌آوریم:

$$F(E,B)^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{E}_{L_1} + \frac{r\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}B_L^3 & -\frac{\mathrm{E}_{L_2}}{r^2} & -\mathrm{E}_{L_3} - \frac{r\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}B_L^1 \\ \mathrm{E}_{L_1} - \frac{r\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}B_L^3 & 0 & -\frac{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}{r\Omega}B_L^3 - \Omega\mathrm{E}_{L_1} & \frac{r}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}B_L^2 \\ \frac{\mathrm{E}_{L_2}}{r^2} & \frac{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}{r\Omega}B_L^3 + \Omega\mathrm{E}_{L_1} & 0 & -\frac{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}{r\Omega}B_L^1 + \Omega\mathrm{E}_{L_3} \\ \mathrm{E}_{L_3} + \frac{r\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}B_L^1 & -\frac{r}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}B_L^2 & \frac{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}{r\Omega}B_L^3 - \Omega\mathrm{E}_{L_1} & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$F(D,H)_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1-r^2\Omega^2}D_L^1 + r\Omega H_{L_3} & \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}D_L^2 & \sqrt{1-r^2\Omega^2}D_L^3 - r\Omega H_{L_1} \\ -\sqrt{1-r^2\Omega^2}D_L^1 - r\Omega H_3 & 0 & \frac{r^2\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}D_L^1 - rH_{L_3} & \frac{H_{L_2}}{r} \\ -\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}D_L^2 & -\frac{r^2\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}D_L^1 + rH_3 & 0 & -\frac{r^2\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}D_L^3 - rH_{L_1} \\ -\sqrt{1-r^2\Omega^2}D_L^3 + r\Omega H_{L_1} & -\frac{H_{L_2}}{r} & \frac{r^2\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}D_L^3 + rH_{L_1} & 0 \end{bmatrix}$$

روابط ساختاری بر اساس معادله $F(D,H)_{ij} = F(E,B)_{ij}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_L^1 = \frac{1}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}E_{L_1} - \frac{r\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}H_{L_3} \qquad (۱-۲۹)$$

$$D_L^2 = \frac{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}{r^2}E_{L_2} \qquad (۲-۲۹)$$

$$D_L^3 = \frac{1}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}E_{L_3} + \frac{r\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}H_{L_1} \qquad (۳-۲۹)$$

$$B_L^1 = \sqrt{1-r^2\Omega^2}H_{L_1} + r\Omega D_L^3 \qquad (۴-۲۹)$$

$$B_L^2 = \frac{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}{r^2}H_{L_2} \qquad (۵-۲۹)$$

$$B_L^3 = \sqrt{1-r^2\Omega^2}H_{L_3} - r\Omega D_L^1 \qquad (۶-۲۹)$$

و روابط ساختاری بر اساس معادله $F(D,H)^{ij} = F(E,B)^{ij}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_L^1 = \sqrt{1-r^2\Omega^2}E_{L_1} - r\Omega B_L^3 \qquad (۱-۳۰)$$

$$D_L^2 = \frac{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}{r^2}E_{L_2} \qquad (۲-۳۰)$$

$$D_L^3 = \sqrt{1-r^2\Omega^2}E_{L_3} + r\Omega B_L^1 \qquad (۳-۳۰)$$

$$B_L^1 = \frac{1}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}H_{L_1} \qquad (۴-۳۰)$$

$$+\frac{r\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}E_{L_3}$$

$$B_L^2=\frac{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}{r^2}H_{L_2} \qquad (۵-۳۰)$$

$$B_L^3=\frac{1}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}H_{L_3}-\frac{r\Omega}{\sqrt{1-r^2\Omega^2}}E_{L_1} \qquad (۶-۳۰)$$

معادلات اخیر یعنی دسته معادلات (۳۰-۱) تا (۳۰-۶) دقیقاً معادلاتی است که در [۱۷] ارائه شده است. از طرفی به‌راحتی می‌توان دید که دسته معادلات (۲۹) و (۳۰) یکسان است. به‌عنوان مثال اگر در (۳۰-۱) به‌جای B_L^3 از (۲۹-۶) جای‌گذاری کنیم رابطه (۲۹-۱) و اگر در (۲۹-۶) به جای D_L^1 از (۳۰-۱) جای‌گذاری کنیم (۳۰-۶) به دست می‌آید. بنابراین، به‌صورت صریح نشان داده شد که نتیجه استفاده از معادله $F(D,H)^{ij}=F(E,B)^{ij}$ و معادله $F(D,H)_{ij}=F(E,B)_{ij}$ برای به دست آوردن روابط ساختاری یکسان است.

ارتباط بین روابط ساختاری در روش اول یعنی روابط (۲۸-۱) تا (۲۸-۶) با روابط ساختاری در روش دوم یعنی دسته معادلات (۲۹) و (۳۰) هم واضح است. روابط (۲۸-۱) تا (۲۸-۳) در روش اول با روابط (۲۹-۱) تا (۲۹-۳) و روابط (۲۸-۴) تا (۲۸-۶) در روش اول با روابط (۳۰-۴) تا (۳۰-۶) کاملاً یکسان است. البته باید توجه داشت که ارتباط بین مولفه‌های اندیس بالا و اندیس پایین برای میدان‌های سه‌بعدی معرفی شده از طریق متریک γ برقرار می‌شود. به‌عنوان مثال در این بخش با توجه به (۲۶) داریم:

$$E^1=\gamma^{1\alpha}E_\alpha=E_1\ ,$$
$$E^2=\gamma^{2\alpha}E_\alpha=\frac{1-r^2\Omega^2}{r^2}E_2\ ,$$
$$E^3=\gamma^{3\alpha}E_\alpha=E_3$$

۴- روابط ساختاری برای ناظر چرخان غیرمرکزی

همانطور که در [۲۳و۲۴] نشان داده است، استفاده از تبدیلات گالیله‌ای دوران برای ناظری که در فاصلهٔ شعاعی ثابتی نسبت به محور دوران با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω در حال چرخش است با مشکلات متعددی روبه روست. در این تبدیلات موقعیت ناظر و رویداد از هم مجزا نمی‌شود و از این رو تعبیر سینماتیکی سازگاری برای تبدیلات وجود ندارد. مطلق بودن زمان باعث می‌شود که توجیه پدیده‌هایی مثل اثر دوپلر عرضی و اتساع زمان ممکن نباشد و توجیه اثر سانا و تقدیم توماس از روی متریک ناظر چرخان هم با ناسازگاری همراه است. این تبدیلات فقط برای حالتی که ناظر حرکت انتقالی نداشته باشد و تنها حول خودش چرخش اسپینی داشته باشد قابل کاربرد است. بنابراین، در [۲۲و۲۳] تبدیلات فرانکلین تعمیم یافته بین ناظر چرخان (S) غیرمرکزی و ناظر اینرسی (S') به‌صورت زیر معرفی می شود:

$$\begin{gathered} t=\cosh(R\Omega)\,t'-\frac{R}{c}\sinh(R\Omega)\,\varphi'\ \ ; \\ r=r' \\ \varphi=\cosh(R\Omega)\,\varphi'-\frac{c}{R}\sinh(R\Omega)\,t'\ \ ; \\ z=z' \end{gathered} \qquad (۳۱)$$

که در آن R موقعیت شعاعی ناظر غیرمرکزی و Ω سرعت زاویه‌ای یکنواخت دوران است. اگر از شکل دیفرانسیلی معکوس تبدیلات فرانکلین استفاده کنیم، با جایگزین‌کردن آن در متریک فضا زمان ناظر اینرسی و با فرض $\beta=R\Omega$ داریم

$$\begin{aligned} ds^2=&\cosh^2\beta\left(1-\frac{r^2}{R^2}\tanh^2\beta\right)dt^2-dr^2 \\ &-r^2\cosh^2\beta\left(1-\frac{R^2}{r^2}\tanh^2\beta\right)d\varphi^2 \\ &+2Rsinh\beta\cosh\beta\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)dtd\varphi \\ &-dz^2 \end{aligned} \qquad (۳۲)$$

برای به دست آوردن روابط ساختاری برای ناظر چرخان غیرمرکزی که از تبدیلات فرانکلین تعمیم‌یافته استفاده می‌کند، از روش اولی که در بخش دوم معرفی شد استفاده می‌کنیم. ابتدا بر اساس (۳۲) داریم:

$$g_{ij}=\begin{bmatrix} \cosh^2\beta-\frac{r^2}{R^2}\sinh^2\beta & 0 & Rsinh\beta\cosh\beta\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ Rsinh\beta\cosh\beta\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) & 0 & -r^2\cosh^2\beta+R^2\sinh^2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

و

$$g^{ij}=\begin{bmatrix} \cosh^2\beta-\frac{R^2}{r^2}\sinh^2\beta & 0 & \frac{R^2-r^2}{r^2R}sinh\beta\cosh\beta & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{R^2-r^2}{r^2R}sinh\beta\cosh\beta & 0 & \frac{\sinh^2\beta}{R^2}-\frac{\cosh^2\beta}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

و با استفاده از (۱) و (۶) داریم:

$$\gamma_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2r^2}{R^2\cosh^2\beta-r^2\sinh^2\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\gamma^{\alpha\beta}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\cosh^2\beta}{r^2}-\dfrac{\sinh^2\beta}{R^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$g=-r^2\ \ ,\ \ \gamma=\frac{r^2}{\cosh^2\beta-\frac{R^2}{r^2}\sinh^2\beta}$$

مانند بخش قبل با استفاده از روابط بالا و از روابط (۱۸) و (۲۲) خواهیم داشت:

$$D_{L_1}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2\beta-\frac{r^2}{R^2}\sinh^2\beta}}E_{L_1}+\frac{(R^2-r^2)sinh\beta\cosh\beta}{rR\sqrt{\cosh^2\beta-\frac{r^2}{R^2}\sinh^2\beta}}H_{L_3}$$

$$D_{L_2}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2\beta-\frac{r^2}{R^2}\sinh^2\beta}}E_{L_2}$$

$$D_{L_3}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2\beta-\frac{r^2}{R^2}\sinh^2\beta}}E_{L_3}-\frac{(R^2-r^2)sinh\beta\cosh\beta}{rR\sqrt{\cosh^2\beta-\frac{r^2}{R^2}\sinh^2\beta}}H_{L_1}$$

$$B_{L_1}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2\beta-\frac{r^2}{R^2}\sinh^2\beta}}H_{L_1}-\frac{(R^2-r^2)sinh\beta\cosh\beta}{rR\sqrt{\cosh^2\beta-\frac{r^2}{R^2}\sinh^2\beta}}E_{L_3}$$

$$B_{L_2}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2\beta-\frac{r^2}{R^2}\sinh^2\beta}}H_{L_2}$$

$$B_{L_3}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2\beta-\frac{r^2}{R^2}\sinh^2\beta}}H_{L_3}+\frac{(R^2-r^2)sinh\beta\cosh\beta}{rR\sqrt{\cosh^2\beta-\frac{r^2}{R^2}\sinh^2\beta}}E_{L_1}$$

به‌راحتی می‌توان دید که این روابط برای حالت $R\to 0$ یعنی برای ناظر مرکزی، به روابط ساختاری مربوط به ناظر چرخان گالیله‌ای که در بخش قبل معرفی شد یعنی روابط (۲۸-۱) تا (۲۸-۶) تبدیل می‌شوند.

۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

شکل سه‌بعدی روابط ساختاری الکترومغناطیس برای ناظرهای غیراینرسی، به طور خاص در حوزه مهندسی برق، مورد توجه بوده است. در عین حال نمایش‌های متفاوت و بعضاً ابهام برانگیزی برای این معادلات در مقالات این حوزه مشاهده می‌شود. در این مقاله با هدف رفع ابهام، نمایش‌های متفاوت از شکل سه‌بعدی روابط ساختاری در چارچوب ناظر چرخان گالیله‌ای با استفاده از فرمالیزم لاندائو با جزئیات کامل بیان شده است. همچنین ارتباط بین نمایش‌های مختلف روابط ساختاری سه‌بعدی توضیح داده شده است. با توجه به اهمیت آزمایشگاهی ناظر چرخان غیرمرکزی، روابط ساختاری الکترومغناطیس برای ناظر چرخان غیرمرکزی هم ارائه شده است. این نتایج می‌تواند برای کاربردهایی مانند بررسی انتشار موج الکترومغناطیسی در چارچوب مرجع چرخان یا بررسی فضا زمان ناظر چرخان به‌عنوان یک محیط اپتیکی مورد استفاده قرار گیرد.

۶- مراجع

[1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, "The classical theory of fields," Pergamon Press, Oxford, Ch 10, 1975.

[2] J. Plebanski, "Electromagnetic waves in gravitational fields," Phys. Rev. Vol. 118, pp. 1396-1407, 1960

[3] F. de. Felice, "On the gravitational field acting as an optical medium," General Relativity and Gravitation, Vol. 2, pp. 347-357, 1971

[4] B. Mashhoon, "Scattering of Electromagnetic Radiation from a Black hole," Physical Review D, Vol. **7,** pp. 2087-2814, 1973.

[5] B. Mashhoon, "Can Einstein's theory of gravitation be tested beyond the geometrical optics limit?," Nature Vol. 250, pp. 316-317, 1974.

[6] A. M. Volkov, A. A. Izmest'ev and G. V. Skrotskii, "The propagation of electromagnetic waves in a Riemannian space," Sov. Phys. JETP, Vol. 32, pp. 686-689, 1971.

[7] A. Besharat, M. Miri and M. Nouri-Zonoz, "Optical Aharonov–Bohm effect due to toroidal moment inspired by general relativity," J. Phys. Commun, Vol. 3, pp. 115019-115028, 2019.

[8] Tse. Chin. Mo, "Theory of Electrodynamics in Media in Noninertial Frames and Applications," J. Math. Phys. Vol. 11, pp. 2589-2610, 1970.

[9] G. C. Scorgie, "Theory of Electrodynamics in Media in Noninertial Frames and Applications," J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 23, pp. 5169-5184, 1990.

[10] R. H. Tyler and L. A. Mysak, "Theory of Electrodynamics in Media in Noninertial Frames and Applications," Can. J. Phys, Vol. 73, pp. 393-402, 1995.

[11] G. F. T. del Castillo, and J. Mercado-Perez, "Three-dimensional formulation of the Maxwell equations

for stationary space–times," J. Math. Phys, Vol. 40, pp. 2882-2890, 1999.

[12] T. Shiozawa, "Phenomenological and electron-theoretical study of the electrodynamics of rotating systems," Proc. IEEE, Vol.61, pp.1694-1702, 1973.

[13] A. Georgiou, "The electromagnetic field in rotating coordinates," Proc. IEEE, Vol. 76, pp. 1051-1052, 1988.

[14] P. Hillion, "Relativistic electromagnetism in rotating media," Turk. J. Elec. Eng, Vol. 18, pp. 281, 2010.

[15] J. Van. Bladel, "Electromagnetic fields in the presence of rotating bodies," Proc. IEEE, Vol. 64, pp.301-318, 1976.

[16] J. Van. Bladel, "Rotating dielectric sphere in a low-frequency field," Proc. IEEE, Vol. 67, pp.1654-1655, 1979.

[17] J. Van. Bladel, "Relativity and Engineering," Berlin: Springer, Ch 9, 1984.

[18] J. Van. Bladel, "Electromagnetic Fields," John Wiley and Sons, Second Edition, Ch 17, 2007.

[19] J. C. Hauck, and B. Mashhoon, "Electromagnetic waves in a rotating frame of reference," Ann. Phys. Vol. 12, pp. 275-288, 2003.

[20] G. V. Skrotskii, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol. 114, pp. 73-76, 1957.

[21] G. F. R. Ellis, R. Maartens and M. A. H. Maccallum, "Relativistic Cosmology," Cambridge University Press, 2012.

[22] H. Ramezani-Aval, "The relation between different definitions of electromagnetic field tensor and Maxwell's equations in stationary spacetimes," Indian. J. Phys, Vol. 39, 2022.

[23] M. Nouri-Zonoz, H. Ramezani-Aval and R. Gharechahi, "On Franklin's relativistic rotational transformation and its modification," Eur. Phys. J. C Vol. 74, 3098, 2014.

[24] M. Nouri-Zonoz and H. Ramezani-Aval, "Fermi coordinates and modified Franklin transformation: a comparative study on rotational phenomena," Eur. Phys. J. C, Vol. 74, 3128, 2014.

Electromagnetic Constitutive Relations in Eccentric Rotating Frames

H.Ramezani-Aval

* Professor, *University of Science and Technology, Tehran, Iran*

(Received: 15/12/2021; Accepted: 07/05/2022)

Abstract

In this article, while analytically reviewing the Landau formalism for electrodynamic equations in the presence of a gravitational field, we show that the three-dimensional electromagnetic constitutive relations in this formalism can be expressed by two equivalent methods .Then we obtain the constitutive relations for the Galilean rotating observer with both methods and show its compatibility with the previous results. We also present the electromagnetic constitutive relations for an eccentric rotating observer. To solve some ambiguities, especially in the articles related to this topic in the field of electrical engineering, different representations of the three-dimensional form of constitutive relations in the Galilean rotating observer's frame are expressed in full detail. Also, the connection between different representations of three-dimensional constitutive relations will be explained. In the end, considering the practical and experimental importance of the eccentric rotating observer, we will obtain the electromagnetic constitutive relations for this particular observer.

Keywords : Electromagnetic constitutive relations; Landau formalism; Eccentric rotating observe