



Analytical modeling of Force and Electromagnetic Torque in Bearing-less Switched-Reluctance Machines Considering Rotor Inclination

A. Najafi , S.Taghipour Boroujeni , N. Taghorabet

*Professor, Shahrekord University, Shahrekord, Iran

(Received: 2024/04/08 revised: 2024/09/22 Accepted:2024/10/11 published: 2024/11/06)

Abstract

Abstract: In the presented paper, an accurate model is proposed for the magnetic levitation force components in switched reluctance machines. The machine geometry, stator winding configuration, instantaneous rotor angular position and the current waveforms are considered as the model input variables. The rotor surface magnetic stress is obtained as a function of time and space by using Maxwell's stress tensor. The required flux density components are obtained by developing an analytical model based on sub-domain analysis. By post-processing of the obtained flux density components the effect of each coil current on producing magnetic levitation force is revealed. The developed models for the magnetic levitation force components are multi-variable second-order functions. Using these functions needs low computational burden for predicting the force components. In addition, by using a conformal transformation the model is extended to consider the rotor eccentricity and inclined rotor condition. The efficacy and the efficiency of the provided model is verified by means of finite element analysis. The maximum obtained error between the proposed analytical model and FEA for the presented simulation are 5.7%, 3.9% and 4.1% (0.52mN.m, 0.04N and 1.2N) for the electromagnetic torque and the x and y components of the levitation force, respectively. In addition, the required simulation time with the same processor for the proposed model and FEA are 420ms and 14.26s, respectively.

Keywords: Switched reluctance machine, Analytical modeling, Magnetic levitation force, electromagnetic torque finite element analysis, sub-domain analysis

Cite this article: A. Najafi, S.Taghipour Boroujeni, N. Taghorabet, "A method to detect the loss of excitation in the",
Applied Electromagnetics , vol.12 , no.2 , pp.53-62 <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.26455153.1403.12.2.6.6>.



© The Author(s).

Publisher: Imam Hossein University

*Corresponding Author Email: s.taghipour@sku.ac.ir

علمی - پژوهشی

مدل سازی تحلیلی نیرو و گشتاور الکترومغناطیسی در ماشین سوئیچ رلوکتانس بدون بلبرینگ با لحاظ نمودن ناهم محوری رتور

امین نجفی^۱، صمد تقی پور بروجنی^{۲*}، نورالدین تقربات^۳

۱- استاد، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران، ۲- دانشجوی دکتری، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران، ۳- استاد، پژوهشکده GREEN، دانشگاه لورن، فرانسه

(دریافت: ۱۴۰۳/۰۵/۱۴، بازنگری: ۱۴۰۳/۰۷/۰۱، پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۲۰، انتشار: ۱۴۰۳/۰۸/۱۶)

چکیده

در پژوهش ارائه شده یک مدل تحلیلی برای نیروی شناورسازی و گشتاور الکترومغناطیسی در ماشین سوئیچ رلوکتانس بدون بلبرینگ ارائه شده است. هندسه ماشین، آرایش سیم پیچی، موقعیت لحظه‌های رتور و شکل موج جریان فازها به عنوان ورودی مدل در نظر گرفته شده‌اند. در گام نخست با حل معادلات مشتق جزی پواسون و لاپلاس حاکم بر ماشین و استفاده از روش زیر دامنه، مؤلفه‌های شعاعی و مماسی چگالی شار فاصله هوایی محاسبه شده است. سپس با استفاده از تعریف تنش ماکسول، فشار مغناطیسی اعمال شده به سطح خارجی رتور به دست آمده است. با استفاده از مدل ارائه شده تأثیر جریان تک تک سیم پیچ‌های استاتور در تولید گشتاور و نیروی شناورسازی الکترومغناطیسی بررسی شده است. به منظور فراهم نمودن یک مدل سریع با محاسبات کم حجم، گشتاور و مؤلفه‌های نیروی شناورسازی الکترومغناطیسی به صورت توابع چند متغیره درجه دوم از جریان کلافها ارائه شده‌اند. همچنین با استفاده از یک نگاشت هم‌نوا و استفاده از روش المان گیری ماشین در راستای محور رتور، مدل مورد نظر برای لحاظ انحرافهای یکنواخت و غیریکنواخت رتور توسعه داده شد. در نهایت برای بررسی کارایی و درستی مدل پیشنهادی نتایج آن با نتایج مدل اجزای محدود مقایسه شده است. بیشترین خطای به دست آمده میان نتایج مدل تحلیلی پیشنهادی و روش اجزای محدود برای متغیرهای گشتاور و مؤلفه‌های X و Y نیروی شناور ساز در شبیه سازی ارائه شده به ترتیب برابر با ۵/۷٪، ۳/۹٪ و ۴/۱٪ (به ترتیب معادل با ۰/۵۲ mN، ۰/۰۴ N و ۱/۰۲ N) است. همچنین زمان انجام شبیه سازی ارائه شده با استفاده از مدل تحلیلی و با استفاده از روش اجزای محدود با یک پردازشگر یکسان به ترتیب برابر ms420 و s26/14 است.

کلیدواژه‌ها: ماشین سوئیچ رلوکتانس، مدل سازی تحلیلی، نیروی شناورسازی الکترومغناطیسی، روش اجزای محدود، روش

تحلیل دامنه

۱- مقدمه

و فعال [۴ و ۳] پیشنهاد شده است. اگرچه بلبرینگ‌های مغناطیسی در شناورسازی مغناطیسی رتور موثر می‌باشند، استفاده از آن‌ها افزایش حجم و وزن کلی موتور را به همراه دارد. راهکار دیگر شناورسازی مغناطیسی رتور، استفاده از سیم پیچ‌های آرمیچر برای تولید نیروی شعاعی مورد نیاز شناورسازی مغناطیسی است [۴-۱۳]. در واقع جریان‌های آرمیچر به گونه‌ای تنظیم می‌شوند که افزون بر نیروی مماسی تولیدکننده گشتاور الکترومغناطیسی، نیروی شعاعی لازم برای نگاه داشتن رتور به صورت هم‌مرکز با استاتور را فراهم آورد. از این ایده در ماشین‌های الکتریکی

استفاده از ماشین‌های الکتریکی بدون بلبرینگ^۲، در کاربردهای سرعت بالا، دارای مزایایی همچون افزایش قابلیت اطمینان، کاهش تعداد دوره‌های تعمیر و نگهداری، کاهش تلفات مکانیکی یاتاقان و حذف گرمای تولیدی آن در سرعت‌های بالا است. به منظور شناورسازی مغناطیسی^۳ رتور در این ماشین‌ها، راهکارهای متنوعی مانند استفاده از بلبرینگ‌های مغناطیسی غیرفعال [۱ و ۲]

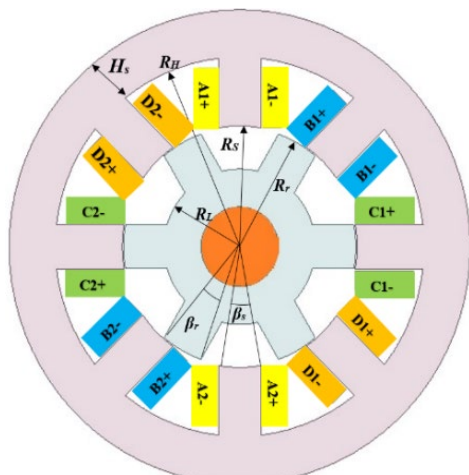
^۲ Bearing-less Electrical Machines

^۳ Magnetic Levitation

استناد: نجفی، امین، تقی پور بروجنی، صمد، تقربات، نورالدین، "مدل سازی تحلیلی نیرو و گشتاور الکترومغناطیسی در ماشین سوئیچ رلوکتانس بدون

بلبرینگ با لحاظ نمودن"، الکترو مغناطیس کاربردی، ۱۲ (۲)، ۵۳-۶۲، ۱۴۰۳، <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.26455153.1403.12.2.6.6>

به‌دست‌آمده‌اند. از آنجایی‌که کاربرد شکل انتگرالی این متغیرها دشوار است، جهت سادگی کار تخمین و کاهش زمان محاسباتی موردنیاز آن‌ها، در بخش سوم، نیرو و گشتاور به‌صورت تابعی از جریان‌های لحظه‌ای استاتور بازگو شده‌اند.



شکل (۱). هندسه موتور سوئیچ رلوکتانس ۱۸/۶ چهار فاز در $\theta_r=30^\circ$

در نهایت در بخش چهارم، نتایج به دست آمده با نتایج روش اجزای محدود راستی آزمایی و تأیید شده‌اند. مدل ارائه شده یک مدل ایستا بوده و برای طراحی اولیه ابعاد و ظرفیت گشتاور و نیروی ماشین و ارزیابی رفتار ماشین در حالت ماندگار مناسب است. همچنین با استفاده از مدل پیشنهادی می‌توان پارامترهای مدل دینامیکی ماشین (دربرگیرنده ثوابت نیرو، گشتاور و اندوکتانس کلاف‌ها) را به دست آورد. در موتور سوئیچ رلوکتانس مرسوم کلاف‌های یک‌فاز 180° با یکدیگر فاصله‌دارند و جریان آن‌ها یکسان است. این موضوع سبب نیروی شعاعی خالص صفر و تزویج صفر میان فازها می‌شود. در مقابل در موتور سوئیچ رلوکتانس بدون بلبرینگ کلاف‌ها به‌صورت جداگانه تحریک شده و این موضوع وجود تزویج متقابل و ایجاد نیروی شعاعی غیر صفر را در پی دارد. این موارد در مدل ارائه شده لحاظ شده‌اند.

۲- مدل‌سازی الکترومغناطیسی

پیش‌بینی مؤلفه‌های چگالی شار فاصله‌هوایی، نخستین گام موردنیاز برای تخمین گشتاور و نیروی شناورسازی مغناطیسی است. از این‌رو در این بخش، از حل تحلیلی معادلات مشتق جزئی پواسون و لاپلاس برای یافتن مؤلفه‌های چگالی شار فاصله‌هوایی در ماشین سوئیچ رلوکتانس استفاده شده است. در این فرایند از روش زیر ناحیه استفاده شده که در ادامه به معرفی آن پرداخته می‌شود. همچنین در فرایند مدل‌سازی از اشباع مغناطیسی چشم پوشی شده، گذردهی مغناطیسی هسته‌های رتور و استاتور بی‌نهایت در نظر گرفته شده و تقارن دوبعدی بر ساختار مسئله لحاظ

متنوعی همچون ماشین آهنربایی سطحی [۵]، ماشین آهنربایی درونی [۷]، ماشین سوئیچ رلوکتانس [۸ و ۹]، ماشین flux switching [۱۰ و ۱۱] استفاده شده است. در این ساختارها برای فراهم نمودن سازوکار تولید نیرو، افزون بر سیم‌پیچی آرمیچر، یک سیم‌پیچ جداگانه و اضافی بر روی آرمیچر قرار گرفته است. اگرچه استفاده از سیم‌پیچ‌های جداگانه برای تولید نیرو و گشتاور، فرایندهای کنترل شناورسازی مغناطیسی و تولید گشتاور را مستقل از یکدیگر نموده و ساده‌سازی‌هایی را در مدار کنترل ماشین فراهم می‌نماید، اما این موضوع سبب افزایش حجم ماشین می‌شود. جهت کاهش حجم استاتور و تلفات اهمی در [۱۲ و ۱۳] از جریان سیم‌پیچ‌های آرمیچر به‌صورت هم‌زمان برای تولید نیروی شعاعی لازم برای شناورسازی مغناطیسی استفاده شده است.

موتورهای بدون بلبرینگ می‌توانند دارای ۲ و یا ۳ درجه آزادی حرکت باشند. در این مقاله تنها دو درجه آزادی حرکت در صفحه قطبی برای ماشین لحاظ و فرض می‌شود که امکان حرکت رتور در راستای محور Z وجود نداشته و یا از این حرکت توسط یک سازوکار دفع غیرفعال مغناطیسی جلوگیری شده است. با توجه به ویژگی مقاوم بودن ساختار مکانیکی رتور در ماشین‌های سوئیچ رلوکتانس، نسبت به ماشین‌های آهنربایی، استفاده از آن‌ها در کاربردهای سرعت‌بالا، دارای مزایای بیشتری است. تخمین نیروی شناورسازی در ماشین سوئیچ رلوکتانس بدون بلبرینگ اهمیت بسزایی دارد. در مرجع [۱۲] نیروی شناورسازی با توجه به مدل بر پایه مدار مغناطیسی (MEC) به‌دست‌آمده است. اگرچه مدل مدار مغناطیسی ساده است ولی نسبت به مدل‌های بر پایه حل دقیق رابطه پواسون دارای دقت کمتری است. در [۱۳] بدون ارائه اثبات ریاضی، توابع استاتیکی درجه دوم از جریان‌ها برای مؤلفه‌های نیروی شناورسازی ارائه شده که ثوابت آن‌ها از روش اجزای محدود به‌صورت off-line به‌دست‌آمده است. با توجه اهمیت نیروی شناورسازی، در این مقاله، به مدل‌سازی و بررسی تأثیر جریان هرکدام از کلاف‌های استاتور در تولید گشتاور الکترومغناطیسی و نیروی شناورسازی پرداخته شده و یک تابع درجه دوم از جریان‌های لحظه‌ای آرمیچر برای آن‌ها ارائه شده است. در ادامه، در بخش دوم با استفاده از روش تحلیل زیر دامنه، مؤلفه‌های چگالی شار ناشی از جریان کلاف‌های استاتور به‌دست‌آمده آمده است. در واقع با حل معادلات ماکسول، مؤلفه‌های چگالی شار به‌صورت تحلیلی محاسبه شده و سپس با انتگرال‌گیری به ترتیب از مؤلفه‌های شعاعی و مماسی فشار مغناطیسی ایجاد شده، مؤلفه‌های نیروی شناورسازی و گشتاور

$$A_{Ri} = \sum_{m=1}^M e_{im} \left(\left(\frac{r}{R_r} \right)^{\frac{m\pi}{\alpha}} + \left(\frac{r}{R_r} \right)^{\frac{-m\pi}{\alpha}} \right) \cos \left(\frac{m\pi}{\alpha} (\varphi - \varphi_{ri-\max}) \right) \quad (۳)$$

$$A_G = \sum_{n=1}^N \left(a_n \left(\frac{r}{R_r} \right)^n + b_n \left(\frac{r}{R_r} \right)^{-n} \right) \cos(n\varphi) + \left(c_n \left(\frac{r}{R_r} \right)^n + d_n \left(\frac{r}{R_r} \right)^{-n} \right) \sin(n\varphi) \quad (۴)$$

$$A_{sj} = \sum_{k=1}^K f_{sk} \left(\left(\frac{r}{R_H} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha_s}} + \left(\frac{r}{R_r} \right)^{\frac{-k\pi}{\alpha_s}} \right) \cos \left(\frac{k\pi}{\alpha_s} (\varphi - \varphi_{sj-\max}) \right) + \frac{\mu_0 J_s}{4} (2R_H^2 \ln r - r^2) \quad (۵)$$

$$B_{G\varphi} = -\frac{\partial A_G}{\partial \varphi} = -\sum_{n=1}^N n \left(-a_n \left(\frac{r}{R_r} \right)^n + b_n \left(\frac{r}{R_r} \right)^{-n} \right) \sin(n\varphi) + \left(c_n \left(\frac{r}{R_r} \right)^n + d_n \left(\frac{r}{R_r} \right)^{-n} \right) \cos(n\varphi) \quad (۶)$$

$$B_{G\varphi} = \frac{\partial A_G}{\partial r} = \sum_{n=1}^N n R_r \left(\left(a_n \left(\frac{r}{R_r} \right)^{n-1} + b_n \left(\frac{r}{R_r} \right)^{-n-1} \right) \cos(n\varphi) + \left(c_n \left(\frac{r}{R_r} \right)^{n-1} + d_n \left(\frac{r}{R_r} \right)^{-n-1} \right) \sin(n\varphi) \right) \quad (۷)$$

با در نظر گرفتن K ، N و M فرکانس نخست پتانسیل مغناطیسی به ترتیب در شیارهای استاتور، فاصله هوایی و شیارهای رتور، با لحاظ شرایط مرزی داده شده و حل روابط مشتق پاره‌ای، توابع پتانسیل مغناطیسی برداری، A ، در زیر ناحیه‌ها به صورت (۳)-(۵) به دست می‌آیند [۱۵]. با مشتق‌گیری از (۳)-(۵) مقادیر چگالی شار مغناطیسی در فاصله هوایی به صورت (۶) و (۷) به دست می‌آیند. برای یافتن ثوابت به کاررفته در توابع (۳)-(۷) از اعمال شرایط مرزی و تحلیل زیر دامنه استفاده شده است و این ثوابت با حل رابطه‌ی (۸) به دست خواهند آمد [۱۵]. چگونگی یافتن (۸) در پیوست آورده شده و متغیرهای مورد استفاده در آن در (۹) معرفی شده‌اند.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K1} & \mathbf{K1} & \mathbf{K2} & \mathbf{K2} & \mathbf{E1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P1} & \mathbf{P2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P1} & \mathbf{P2} & \mathbf{E3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K3} & \mathbf{K3} & \mathbf{K4} & \mathbf{K4} & \mathbf{0} & \mathbf{F1} \\ \mathbf{U} & -\mathbf{U} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U} & -\mathbf{U} & \mathbf{0} & \mathbf{F3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{W1} \\ \mathbf{W2} \end{pmatrix} \quad (۸)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N)^T \\ \mathbf{b} &= (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_N)^T \\ \mathbf{c} &= (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_N)^T \\ \mathbf{d} &= (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_N)^T \\ \mathbf{e} &= (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_{Q_r})^T \\ \mathbf{e}_i &= (e_{i1} \ e_{i2} \ \dots \ e_{iM}) \\ \mathbf{f} &= (\mathbf{f}_1 \ \mathbf{f}_2 \ \dots \ \mathbf{f}_{Q_s})^T \\ \mathbf{f}_i &= (f_{i1} \ f_{i2} \ \dots \ f_{iK}) \end{aligned} \quad (۹)$$

۲-۲. فشار الکترومغناطیسی و نیروی شناورسازی

شده است. شایان ذکر است به دلیل یاتاقان‌های پشتیبان (back-up bearing) و وجود کنترلرهای سریع و مقاوم (fast and robust)، وجود شرایط هم‌مرکزی رتور و استاتور در ماشین‌های بدون بلبرینگ تضمین شده است و بدون نگرانی می‌توان از مدل هم‌مرکز استفاده نمود [۱۲] و [۱۳]. در شکل (۱) یک موتور سوئیچ رلوکتانس چهار فاز $\lambda/6$ نشان داده شده است. پارامترهای هندسی استفاده شده در فرآیند مدل‌سازی در این شکل نشان داده شده و عبارت‌اند از: شعاع داخلی یوغ استاتور، R_s شعاع داخلی استاتور، R_m بیشترین شعاع دندان رتور و R_r کمترین شعاع دندان رتور. همچنین β_s کمان دندان استاتور، β_r کمان دندان رتور، Q_s و Q_r به ترتیب تعداد دندان‌های استاتور و رتور و J_{si} چگالی جریان در شیار آم استاتور می‌باشند.

۲-۱. روش تحلیل زیر دامنه

روش تحلیل زیر دامنه برای حل معادلات مشتق جزئی حاکم بر فاصله هوایی که دارای برجستگی مغناطیسی در سطوح خود است روشی مناسب و کارا است [۱۴] و [۱۵]. اگرچه مدل‌سازی ماشین‌های آهنربایی در [۱۴] و [۱۵] با استفاده از روش تحلیل زیر دامنه انجام شده است ولی قابل تعمیم به ماشین سوئیچ رلوکتانس نیز است. در (۱) زیر دامنه‌های در نظر گرفته شده آورده شده است. این زیر ناحیه‌ها، روابط حاکم بر آن‌ها و شرایط مرزی میان آن‌ها در شکل (۲) آورده شده است. برای سادگی دیواره شیارهای رتور و استاتور با زوایای ثابت لحاظ شده‌اند.

S: Number of subdomains, Q_s ($j = 1, \dots, Q_s$)

$$R_s < r < R_H, \varphi_{sj-\min} < \varphi < \varphi_{sj-\max}$$

G: Number of subdomains, 1

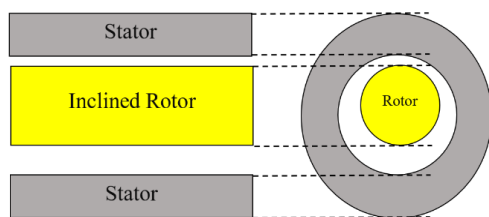
$$R_r < r < R_s$$

R: Number of subdomains, Q_r ($i = 1, \dots, Q_r$)

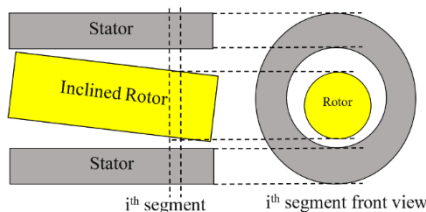
$$R_L < r < R_r, \varphi_{ri-\min} < \varphi < \varphi_{ri-\max}$$

همان گونه که در شکل (۲) مشخص است، رابطه حاکم بر فاصله هوایی (G) و شیارهای رتور (R) از نوع لاپلاس و رابطه حاکم بر شیارهای استاتور (S) از نوع پواسون است. در شکل ۲ منظور از n مؤلفه عمود بر سطح است و J_s چگالی جریان شیار استاتور، مطابق (۲) از تقسیم نمودن آمپر دور کل موجود در شیار i -ام (جمع جریان دو بازوی کلاف‌های چپ I_{siL} و راست I_{siR} موجود در شیار) بر مساحت شیار به دست می‌آید.

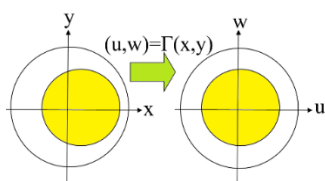
$$J_{si} = \frac{N_s (I_{siL} + I_{siR})}{A_s}$$



(آ)



(ب)



(پ)

شکل (۳). نمای محوری و روبه‌روی ماشین (آ) با ناهم‌محوری

یکنواخت و (ب) با ناهم‌محوری غیریکنواخت (نمای روبه‌رو برای قطعه i^{th} نمایش داده شده است). (پ) تبدیل هم‌نوا Γ برای تبدیل ساختار ناهم‌محور به هم‌محور

که $\gamma_i(r, \varphi, \theta_r)$ و $\psi_i(r, \varphi, \theta_r)$ به ترتیب مؤلفه‌های شعاعی و مماسی میدان مغناطیسی ناشی از یک آمپر جریان در سیم‌پیچ i -ام ماشین و گشتاور به صورت توابع درجه دوم از جریان مؤلفه‌های نیرو و گشتاور به صورت توابع درجه دوم از جریان سیم‌پیچ‌ها ارائه شده در (۱۶)–(۱۸) نمایان می‌شوند، که در آن‌ها $I(t)$ دربرگیرنده جریان کلاف‌ها بوده و در (۱۹) آورده شده است. پارامترهای توابع (۱۶)–(۱۸) تنها تابع موقعیت رتور بوده و در (۲۰)–(۲۲) آورده شده‌اند.

$F_x(t, \theta_r) = [\mathbf{I}(t)][\mathbf{\Gamma}(\theta_r)][\mathbf{I}(t)]^T$	(۱۶)
$F_y(t, \theta_r) = [\mathbf{I}(t)][\mathbf{\Psi}(\theta_r)][\mathbf{I}(t)]^T$	(۱۷)
$T(t, \theta_r) = [\mathbf{I}(t)][\mathbf{K}(\theta_r)][\mathbf{I}(t)]^T$	(۱۸)
$[\mathbf{I}(t)] = [I_{C1}(t) \quad I_{C2}(t) \quad \dots \quad I_{CQ_s}(t)]$	(۱۹)
$K_{i,j}(\theta_r) = \frac{R^2 L_{stk}}{\mu_0} \int_0^{2\pi} \gamma_i(\theta_r) \psi_j(\theta_r) d\varphi$	(۲۰)

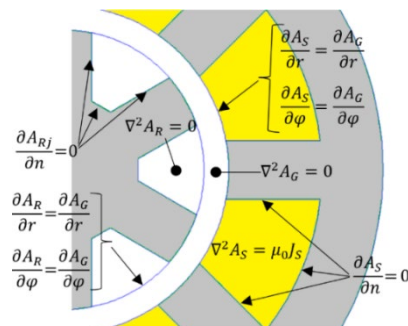
با دانستن توزیع چگالی شار، فشار مغناطیسی شعاعی (σ_r) و مماسی (σ_φ) وارد بر استاتور از رابطه تنش ماکسول به صورت (۱۰) به دست می‌آیند.

$$\sigma_r = \frac{1}{2\mu_0} (B_{Gr}^2 - B_{G\varphi}^2) \quad (10)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{\mu_0} B_{Gr} B_{G\varphi}$$

$$F_x = \frac{RL_{stk}}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} ((B_{Gr}^2 - B_{G\varphi}^2) \cos \varphi + (2B_{Gr} B_{G\varphi}) \sin \varphi) d\varphi \quad (11)$$

$$F_y = \frac{RL_{stk}}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} ((B_{G\varphi}^2 - B_{Gr}^2) \sin \varphi + (2B_{Gr} B_{G\varphi}) \cos \varphi) d\varphi \quad (12)$$



شکل (۲). روابط حاکم بر زیر ناحیه‌ها و شرایط مرزی میان آن‌ها

با تصویر نمودن مؤلفه‌های شعاعی و مماسی فشار مغناطیسی بر روی محورهای مختصات دکارتی و انتگرال‌گیری از آن‌ها، مؤلفه‌های X و Y نیروی شناور ساز مغناطیسی به صورت (۱۱) و (۱۲) به دست خواهند آمد. همچنین گشتاور الکترومغناطیسی طبق تعریف گشتاور از رابطه‌ی (۱۳) به دست خواهد آمد.

$$T = R^2 L_{stk} \int_0^{2\pi} \sigma_\varphi d\varphi \quad (13)$$

۳. توابع گشتاور و نیروی شناور ساز

استفاده از روابط (۱۱)–(۱۳) برای تخمین نیروی شناورسازی و گشتاور به دلیل وجود عملگرهای انتگرالی دشوار بوده و نیازمند حجم محاسباتی بالا به‌ویژه در فرآیندهای تکراری مانند شبیه‌سازی‌های دینامیکی است. به‌منظور ساده‌سازی تخمین این متغیرها، در ادامه آن‌ها به صورت توابعی از جریان‌های لحظه‌ای فازهای استاتور و موقعیت رتور بیان شده‌اند. با فرض خطی بودن شرایط مغناطیسی، مؤلفه‌های چگالی شار، توابعی خطی از جریان فازهای استاتور بوده و به صورت (۱۴) و (۱۵) بازنویسی می‌شوند.

$$B_{Gr}(r, \varphi, \theta_r) = \sum_{i=1}^{Q_s} \gamma_i(r, \varphi, \theta_r) I_{Ci} \quad (14)$$

$$B_{G\varphi}(r, \varphi, \theta_r) = \sum_{i=1}^{Q_s} \psi_i(r, \varphi, \theta_r) I_{Ci} \quad (15)$$

مشتق گیری است. بالانویس استفاده شده مربوط به صفحه ای است که متغیر در آن بیان شده است [۱۶].

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}^{nw}}{\left(\frac{dz}{d\Gamma}\right)^*} \quad (24)$$

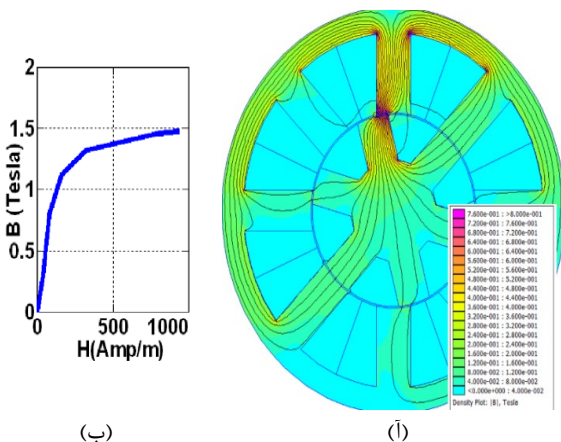
۴-۲- مدل سازی ناهم محوری غیر یکنواخت

برای یافتن چگالی شار در شرایط ناهم محوری غیر یکنواخت، ماشین در راستای محور ماشین به شماری المان تقسیم می شود. در شکل ۳-ب نمای المان i-m و نمای روبه رویی آن آورده شده است. با لحاظ این المان های محوری یک مدل شبه سه بعدی به دست می آید. در هر یک از این المان ها، ناهم محوری یکنواخت برقرار بوده و توابع چگالی شار و مؤلفه های نیرو و گشتاور توسط روش ارائه شده در بخش ۴-۱ قابل محاسبه است. در نهایت مؤلفه های نیرو و گشتاور کل با جمع زدن متغیرهای مرتبط در تمامی المان ها به صورت (۲۵) به دست می آید که در آن N تعداد المان های در نظر گرفته شده در راستای محور ماشین بوده و X می تواند هر یک از مؤلفه های نیرو و یا گشتاور باشد.

$$X(\theta_r) = \sum_{i=1}^N X_i(\theta_r) \quad (25)$$

۵. راستی آزمایی

برای راستی آزمایی مدل ارائه شده، نتایج آن با نتایج شبیه سازی های اجزای محدود مقایسه شده اند. مشخصات هندسی ماشین مورد نظر در جدول (۱) داده شده است. منحنی مغناطیسی ماده فرو مغناطیس به کارفته (M19) و نتیجه گرافیکی توزیع چگالی شار در موقعیت رتور $\theta_r = 15^\circ$ ناشی از تحریک تنها کلاف A1 در شکل (۴) آورده شده است.



شکل (۴). (الف) منحنی مغناطیسی ورق فرو مغناطیس M-19 (ب)

توزیع چگالی شار برای موقعیت رتور $\theta_r = 15^\circ$ و جریان $I_{A1} = 1A$ جدول ۱: مشخصات هندسی موتور سوئیچ رلوکتانس مورد مطالعه

۴. انحراف از مرکز رتور

همان گونه که اشاره شد، ناهم محوری رتور تنها برای شرایط گذرا اتفاق افتاده و وجود کنترلرهای سریع رتور را به حالت هم محوری با استاتور تعدیل می نمایند [۱۲ و ۱۳]. همچنین مدل سازی ناهم محوری رتور و استاتور بحث گسترده ای بوده و خود می تواند موضوع یک یا چندین مقاله باشد. علیرغم موارد یاد شده، در این بخش به ارائه راه حل ساده برای مدل سازی شرایط ناهم محوری رتور و استاتور ماشین سوئیچ رلوکتانس بدون بلبرینگ پرداخته می شود. در یک دسته بندی کلی ناهم محوری رتور به دو قسمت عمده ناهم محوری یکنواخت و ناهم محوری غیر یکنواخت قابل تقسیم است. در ناهم محوری یکنواخت محورهای رتور و استاتور در تمام طول رتور به یک اندازه جابه جایی داشته و موازی با یکدیگر هستند (شکل ۳-آ)) در حالی که در ناهم محوری غیر یکنواخت فاصله ی محورهای رتور و استاتور در طول ماشین یکسان نبوده و با یکدیگر متقاطع می باشند (شکل ۳-ب)). برای سادگی نمایش، در شکل (۳) رتور به صورت یک استوانه نشان داده شده، و در ماشین با ناهم محوری غیر یکنواخت تنها نمای روبه رویی المان شماره i نشان داده شده است. در ادامه با توسعه مدل ماشین سوئیچ رلوکتانس هم مرکز ارائه شده در بخش ۲، مدل ماشین در شرایط ناهم محوری یکنواخت و غیر یکنواخت به دست آورده شده است.

۴-۱- مدل سازی ناهم محوری یکنواخت

در شرایط ناهم محوری یکنواخت، می توان با یک نگاهت هم نوای $(x,y)\Gamma$ که در (۲۳) آورده شده است [۱۶]، ساختار ناهم محور در صفحه xy را به یک ساختار هم محور در صفحه uw تبدیل نمود شکل (۳-ب))، که در آن ϵ میزان خروج از مرکز رتور است.

$$\Gamma_{r,j}(\theta_r) = \frac{RL_{sk}}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} ((\gamma_r(\theta_r)\gamma_r(\theta_r) - \psi_r(\theta_r)\psi_r(\theta_r)) \cos \varphi - 2\gamma_r(\theta_r)\psi_r(\theta_r) \sin \varphi) d\varphi \quad (21)$$

$$\Psi_{r,j}(\theta_r) = \frac{RL_{sk}}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} ((\gamma_r(\theta_r)\gamma_r(\theta_r) - \psi_r(\theta_r)\psi_r(\theta_r)) \sin \varphi + 2\gamma_r(\theta_r)\psi_r(\theta_r) \cos \varphi) d\varphi \quad (22)$$

$$\Gamma(z) = \frac{z + cR_s}{cz + R_s}$$

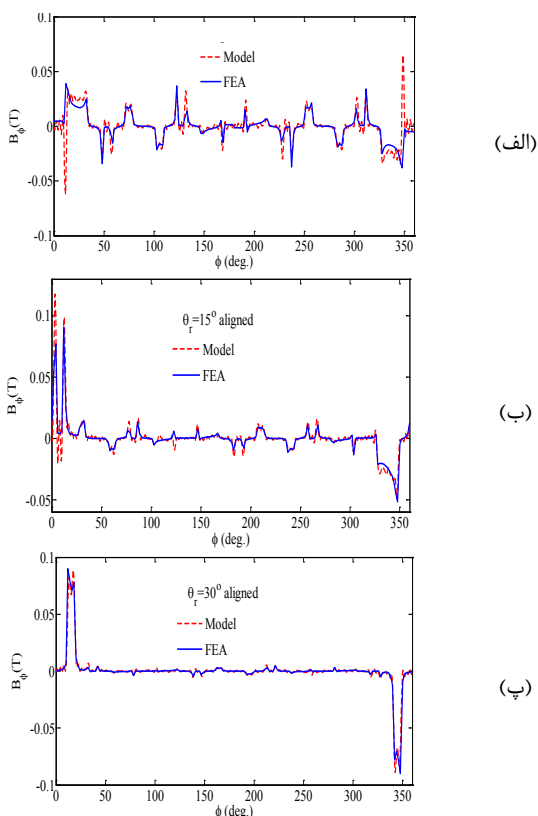
$$z = x + jy$$

$$c = \frac{-B + (B^2 - 4)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad (23)$$

$$B = \frac{R_s^2 + \epsilon^2 - R_r^2}{\epsilon R_s}$$

یافتن چگالی شار مغناطیسی در شرایط هم محور طبق مطالب ارائه شده در بخش ۲ قابل دست یابی است. طبق تئوری نگاهت های هم نوا برای یافتن چگالی شار در شرایط ناهم محوری رتور و استاتور کافی است از رابطه (۲۴) استفاده نمود که در آن نماد * مربوط به مزدوج مختلط بوده و $dz/d\Gamma$ مربوط به عملیات

از شکل (۷) مشخص است که نقش کلاف‌های مختلف در تولید گشتاور یکسان بوده و تنها به اندازه اختلاف فاز الکتریکی آن‌ها با یکدیگر شیفت فاز دارد. بیشترین مقدار گشتاور طبق انتظار در موقعیت نیمه هم‌راستایی کلاف‌ها با رتور ایجاد می‌شود. به دلیل موقعیت فیزیکی کلاف‌های A1 و A2، آن‌ها در تولید Fx نقشی چندانی نداشته $\Psi(1,1)$ و $\Psi(5,5)$ در شکل (۷-ب) و سهم آن‌ها در تولید Fy چشم‌گیر و برعکس یکدیگر است $\Gamma(1,1)$ و $\Gamma(5,5)$ در شکل (۶-ب). همچنین بیشترین مقدار نیروی Fy تولیدشده توسط A1 و A2 و بیشترین مقدار نیروی Fx تولیدشده توسط C1 در موقعیت هم‌راستایی کامل رتور با این کلاف‌ها است. طبق انتظار مشارکت کلاف A1 در تولید Fx $\Psi(1,1)$ (شکل (۷-ب) مشابه مشارکت کلاف C1 در تولید Fy $\Gamma(3,3)$ (شکل (۶-الف) با لحاظ شیفت فاز آن است. لازم به یادآوری است نقش برهم‌کنش متقابل جریان کلاف‌ها در تولید نیرو و گشتاور در روابط (۱۶)-(۱۹) با لحاظ درایه‌های غیرقطری در نظر گرفته شده است.



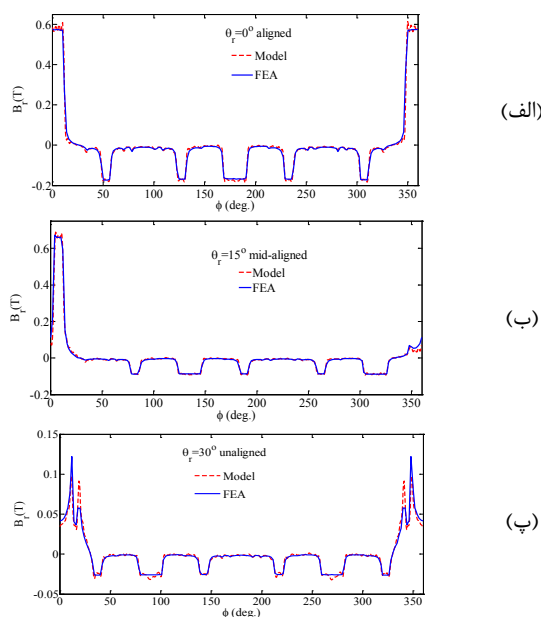
شکل (۶). مؤلفه مماسی چگالی شار فاصله هوایی به دست آمده تحلیلی و المان محدود برای (الف) $\theta_r=0^\circ$ ، (ب) $\theta_r=15^\circ$ و (پ) $\theta_r=30^\circ$

در نهایت برای بررسی کارایی مدل به دست آمده در روابط (۱۶)-(۱۹) مقادیر مؤلفه‌های نیرو و گشتاور برای جریان ثابت یک آمپر جریان در سیم‌پیچ A1 برای یک دوره تناوب چرخش رتور (۰ تا ۶۰ درجه) محاسبه، در شکل (۸) آورده شده و با مقادیر به دست آمده از روش اجزای محدود مقایسه شده است. بیشترین

پارامتر	نماد	اندازه
شعاع داخلی استاتور	R_t	۲۲/۸ mm
شعاع دندانه استاتور	R_s	۱۲/۵ mm
شعاع دندانه رتور	R_{ro}	۱۲/۳ mm
شعاع رتور	R_r	۶/۳۵ mm
تعداد شیار استاتور	Q_s	۸
زاویه کمان استاتور	β_s	24°
تعداد شیار رتور	Q_r	۶
زاویه کمان رتور	β_r	$22/5^\circ$
طول محوری	L_{stk}	۹۰ mm
تعداد دور سیم‌پیچ هر فاز	N	۱۲۰
ناهم محوری یکنواخت	ϵ	۰/۱ mm
فاصله هوایی محدودشده توسط بلبرینگ پشتیبان		۰/۱ mm

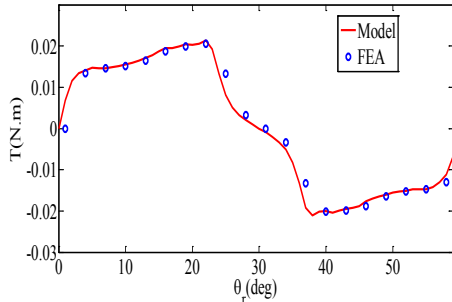
همچنین مؤلفه‌های شعاعی و مماسی چگالی شار فاصله هوایی با استفاده از روابط (۶) و (۷) برای یک آمپر جریان در $I_{A1}=1A$ در شرایط هم‌راستایی، نیمه هم‌راستایی و نا هم‌راستایی رتور $\theta_r=0^\circ$ و $\theta_r=15^\circ$ و $\theta_r=30^\circ$ در شکل‌های (۵) و (۶) آورده و با نتایج اجزای محدود مقایسه شده‌اند. در گام بعد با محاسبه مؤلفه‌های چگالی شار پارامترهای مورد استفاده در تخمین مؤلفه‌های نیرو و گشتاور از روابط (۲۰)-(۲۲) محاسبه شده‌اند.

از آنجایی که تعداد درایه‌های ماتریس‌های مورد نظر زیاد است در ادامه تنها برخی از آن‌ها گزارش شده‌اند. در شکل (۷) نمودار المان‌های قطری ماتریس‌های Ψ ، K و Γ برای کلاف‌های A1، C1 و A2 نمایش داده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود سهم کلاف‌های A1 و A2 به عنوان کلاف‌های روبه‌روی هم در تولید گشتاور یکسان است $K(5,5)$ و $K(1,1)$ در شکل (۷-الف).

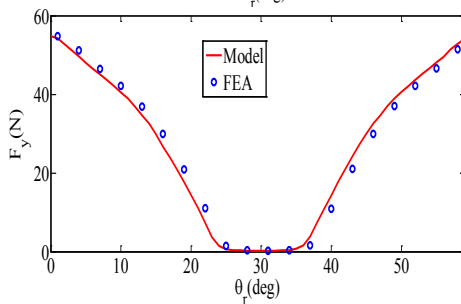


شکل (۵). مؤلفه شعاعی چگالی شار فاصله هوایی به دست آمده تحلیلی و المان محدود برای (الف) $\theta_r=0^\circ$ ، (ب) $\theta_r=15^\circ$ و (پ) $\theta_r=30^\circ$

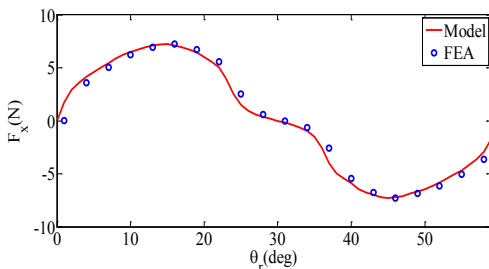
جابه‌جایی‌های مرکز رتور به‌اندازه 0.1 mm به ترتیب در راستای محورهای x و y به‌دست‌آمده و نشان داده شده است.



(الف)



(ب)



(پ)

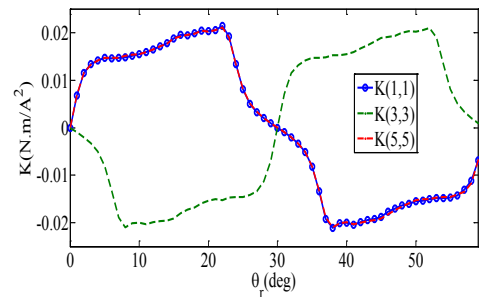
شکل (۸). مقادیر (الف) گشتاور (ب) F_x (پ) F_y برحسب موقعیت رتور در شرایط تحریک فاز A1

با توجه به روش پیشنهادی در بخش ۴-۲، مؤلفه‌های نیروی شناورسازی در شرایط انحراف غیریکنواخت با استفاده از رابطه (۲۵) به‌دست‌آمده است. شرایط در نظر گرفته شده برای انحراف غیریکنواخت رتور به صورتی است که مطابق شکل (۳-ب) سطح مقطع رتور در انتهای چپ محور رتور 0.1 mm در راستای محور y و سطح مقطع رتور در انتهای راست محور رتور 0.1 mm در خلاف راستای محور y جابه‌جاشده باشند.

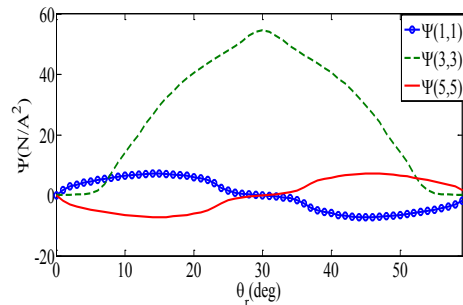
در این شرایط انحراف رتور، مؤلفه‌های نیروی الکترومغناطیسی برای جریان $I_{A1}=1A$ توسط روش پیشنهادی و روش اجزای محدود به‌دست‌آمده و در شکل (۱۲) آورده شده است. همان‌گونه که انتظار می‌رود و از شکل‌های (۵)، (۶)، و (۸) تا (۱۲) مشخص است، مدل پیشنهادی توانایی و دقت خوبی در پیش‌بینی متغیرهای الکترومغناطیسی دارد.

خطای به‌دست‌آمده میان نتایج مدل تحلیلی پیشنهادی و روش اجزای محدود در شکل‌های (۸)-(آ) تا (پ) به ترتیب برابر با 5.7% ، 4.1% و 3.9% است. همچنین زمان انجام شبیه‌سازی با استفاده از مدل تحلیلی و با استفاده از روش اجزای محدود با یک پردازشگر یکسان به ترتیب برابر 420 ms و $14/26 \text{ s}$ است.

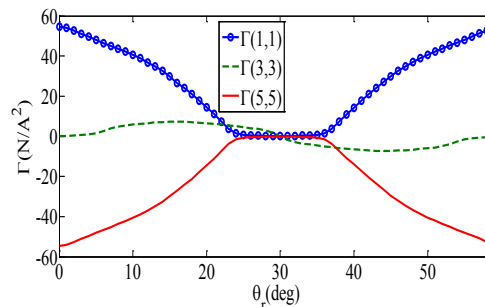
برای بررسی رفتار مدل در شرایط انحراف رتور، ناهم‌محوری‌های یکنواخت و غیریکنواخت مطالعه شده است. در ناهم‌محوری یکنواخت بیشترین جابه‌جایی رتور به‌اندازه 0.1 mm (برابر با کمترین فاصله هوایی پیش از برخورد محور رتور به بلبرینگ پشتیبان و محدود شدن جابه‌جایی آن) لحاظ شده است.



(الف)



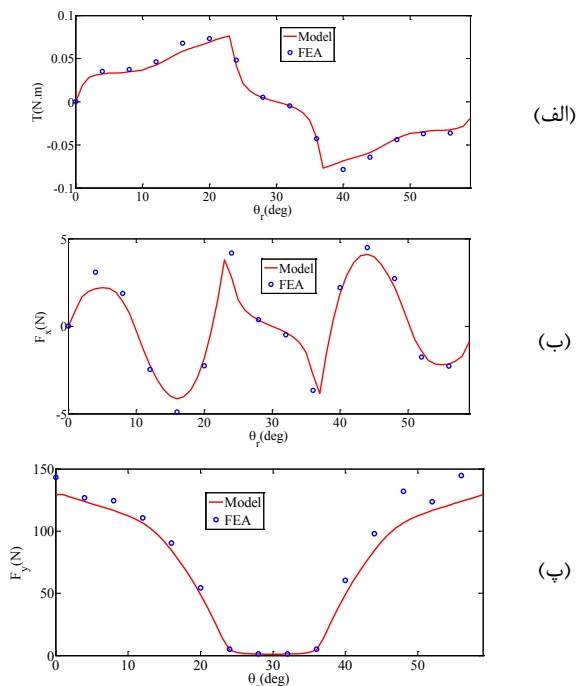
(ب)



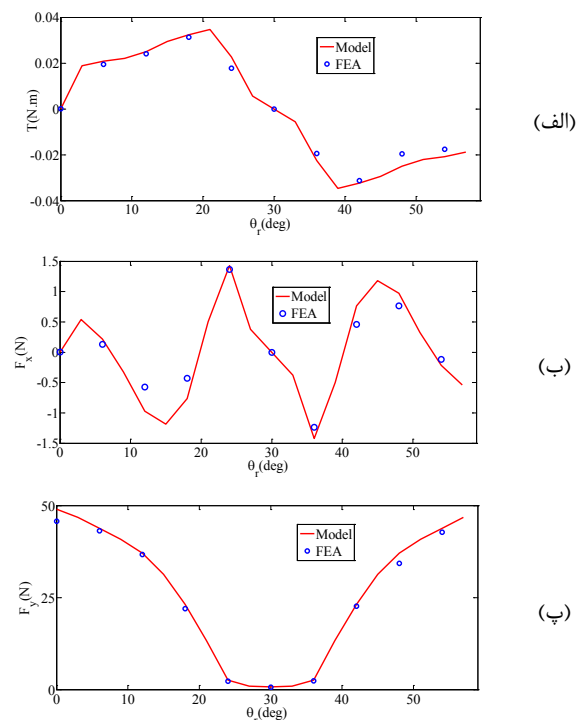
(پ)

شکل (۷). پارامترهای توابع (الف) گشتاور (ب) F_x (پ) F_y در روابط (۱۶)-(۱۹) برحسب موقعیت رتور

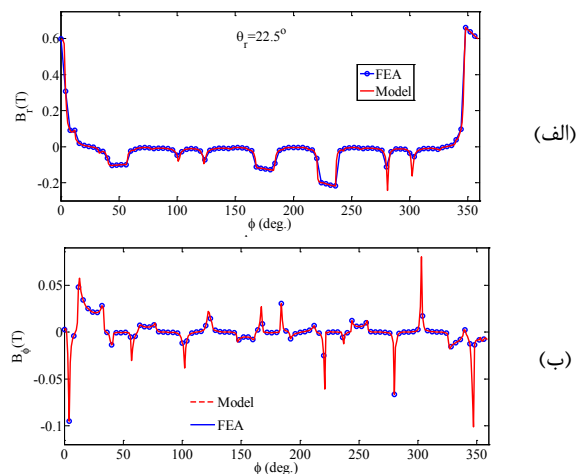
در شکل (۹) مؤلفه‌های چگالی شار به‌دست‌آمده از رابطه (۲۴) با نتایج روش اجزای محدود برای یک آمپر جریان $I_{A1}=1A$ در شرایط نیمه هم‌راستایی رتور ($\theta_r=22.5^\circ$) و جابه‌جایی رتور به‌اندازه 0.1 mm در راستای محور x آورده شده است. همچنین در شکل‌های (۱۰) و (۱۱) مؤلفه‌های نیرو و گشتاور برای جریان $I_{A1}=1A$ توسط روش پیشنهادی و روش اجزای محدود برای دو حالت



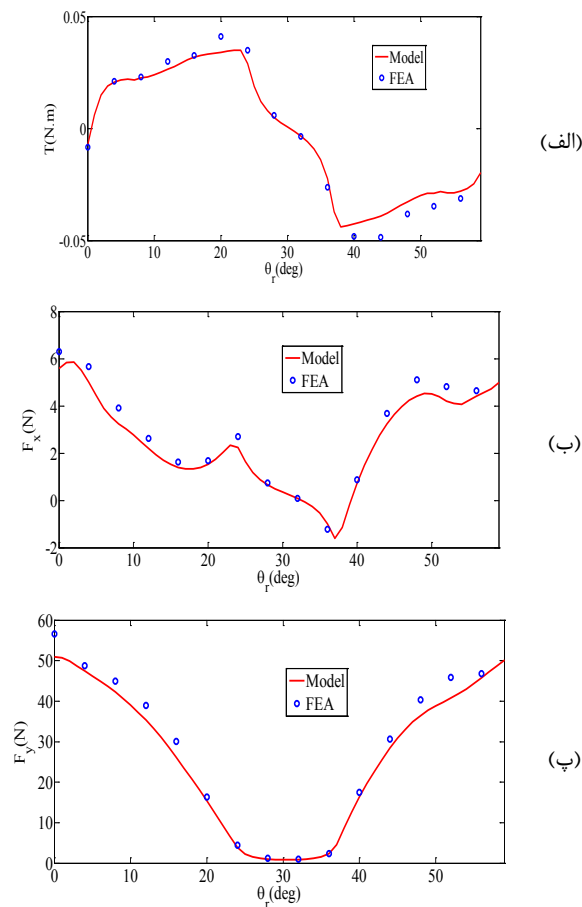
شکل (۱۱). مقادیر (الف) گشتاور (ب) F_x (پ) F_y بر حسب موقعیت رتور در شرایط تحریک فاز A1 برای ناهم‌محوری یکنواخت به‌اندازه‌ی $1mm$ در راستای محور y



شکل (۱۲). مقادیر (الف) گشتاور (ب) F_x (پ) F_y در شرایط تحریک فاز A1 برای ناهم‌محوری غیریکنواخت به‌اندازه‌ی $1/0 \pm mm$ در راستای محور y به ترتیب در دو سمت راست و چپ رتور



شکل (۹). مؤلفه‌های (الف) شعاعی و (ب) مماسی چگالی شار فاصله هوایی به‌دست‌آمده تحلیلی و المان محدود برای $\theta_r=22.5^\circ$ و انحراف یکنواخت رتور با جابه‌جایی $1mm$ در راستای محور x



شکل (۱۰). مقادیر (الف) گشتاور (ب) F_x (پ) F_y بر حسب موقعیت رتور در شرایط تحریک فاز A1 برای ناهم‌محوری یکنواخت به‌اندازه‌ی $1/0 mm$ در راستای محور x

vol. 47, no. 10, pp. 4262-4265, Oct. 2011.

- [7] J. Amemiya, A. Chiba, D. G. Dorrell and T. Fukao, "Basic characteristics of a consequent-pole-type bearingless motor," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 41, no. 1, pp. 82-89, Jan. 2005.
<https://doi.org/10.1109/TMAG.2004.840179>
- [8] Z. Xu, D. -H. Lee and J. -W. Ahn, "Comparative Analysis of Bearingless Switched Reluctance Motors With Decoupled Suspending Force Control," *IEEE Trans. Industry Applications*, vol. 51, no. 1, pp. 733-743, Jan.-Feb. 2015.
- [9] M. Takemoto, H. Suzuki, A. Chiba, T. Fukao and M. A. Rahman, "Improved analysis of a bearingless switched reluctance motor," *IEEE Trans. Industry Applications*, vol. 37, no. 1, pp. 26-34, Jan.-Feb. 2001.
- [10] Q. Ding, T. Ni, X. Wang and Z. Deng, "Optimal Winding Configuration of Bearingless Flux-Switching Permanent Magnet Motor With Stacked Structure," *IEEE Trans. Energy Conversion*, vol. 33, no. 1, pp. 78-86, March 2018.
- [11] Y. Zhou, F. Fang and M. Zheng, "Research on Fast Design of Key Variables of Bearingless Flux-Switching Motor Based on Variable Structure Magnetic Network," *IEEE Trans. Industry Applications*, vol. 55, no. 2, pp. 1372-1381, March-April 2019.
- [12] X. Cao, J. Zhou, C. Liu and Z. Deng, "Advanced Control Method for a Single-Winding Bearingless Switched Reluctance Motor to Reduce Torque Ripple and Radial Displacement," *IEEE Trans. Energy Conversion*, vol. 32, no. 4, pp. 1533-1543, Dec. 2017.
- [13] L. Chen and W. Hofmann, "Speed Regulation Technique of One Bearingless 8/6 Switched Reluctance Motor with Simpler Single Winding Structure," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 59, no. 6, pp. 2592-2600, June 2012.
- [14] A. Rahideh and T. Korakianitis, "Analytical Open-Circuit Magnetic Field Distribution of Slotless Brushless Permanent-Magnet Machines with Rotor Eccentricity," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 47, no. 12, pp. 4791-4808, Dec. 2011.
- [15] S. Taghipour, SP. Emami, N. Takorabet, and A. Mahmoudi, "Analytical investigation of the armature current influence on the torque and radial force in eccentric consequent-pole PM machines," *IET Electric Power Applications*, Vol. 15, no.4, pp.441-452, Feb. 2021.
- [16] k. Sheibani, S. Taghipour, G. Arab, "Analytical Modeling of Eccentric SPM Vernier Machine," *Journal of Applied Electromagnetics*, Vol. 7, No.2, pp 53-62, Feb 2020

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله یک دسته توابع استاتیکی درجه دوم برحسب جریان کلاف‌های استاتور برای پیش‌بینی گشتاور و مؤلفه نیروی شناور ساز در ماشین سوئیچ رلوکتانس بدون بلبرینگ ارائه شد و درستی آن با روش اجزای محدود راستی آزمایی شد. ثوابت به کاررفته در این توابع برحسب مؤلفه‌های چگالی شار معرفی شدند. برای یافتن چگالی شار فاصله هوایی از روش تحلیل زیر دامنه استفاده شد. همچنین با استفاده از یک نگاشت هم‌نوا و استفاده از روش المان گیری ماشین در راستای محور رتور، مدل موردنظر برای لحاظ انحراف‌های یکنواخت و غیریکنواخت رتور توسعه داده شد. درستی مدل ارائه‌شده و کارایی آن با مقایسه نتایج با روش اجزای محدود بررسی و به اثبات رسید. از آنجایی که توابع معرفی‌شده برای مؤلفه‌های نیرو و گشتاور توابعی ایستا از جریان‌ها هستند (و شامل عملگرهای انتگرالی نیستند) استفاده از آن‌ها در کاهش زمان تخمین متغیرهای گشتاور و نیرو در شبیه‌سازی‌های دینامیکی بسیار مفید است.

۵- مراجع

- [1] E. Marth, G. Jungmayr and W. Amrhein, "A 2-D-Based Analytical Method for Calculating Permanent Magnetic Ring Bearings With Arbitrary Magnetization and Its Application to Optimal Bearing Design," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 50, no. 5, pp. 1-8, May 2014.
- [2] W. Gruber, H. Grabner, S. Silber and W. Amrhein, "Design of a Brushless Permanent-Magnet Synchronous Drive with a Purely Passively Suspended Rotor," in *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 50, no. 5, pp. 3258-3264, Sept.-Oct. 2014.
- [3] N. R. Hemenway and E. L. Severson, "Three-Pole Magnetic Bearing Design and Actuation," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 56, no. 6, pp. 6348-6359, Nov.-Dec. 2020.
- [4] W. Amrhein, W. Gruber, W. Bauer and M. Reisinger, "Magnetic Levitation Systems for Cost-Sensitive Applications—Some Design Aspects," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 52, no. 5, pp. 3739-3752, Sept.-Oct. 2016.
- [5] X. Sun, L. Chen and Z. Yang, "Overview of Bearingless Permanent-Magnet Synchronous Motors," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 60, no. 12, pp. 5528-5538, Dec. 2013.
- [6] J. Asama, R. Nakamura, H. Sugimoto and A. Chiba, "Evaluation of Magnetic Suspension Performance in a Multi-Consequent-Pole Bearingless Motor," *IEEE Trans. Magnetics*,

۸. پیوست

$$\mathbf{F2} = \frac{k \pi}{R_H \alpha_s} \left(\left(\frac{R_s}{R_H} \right)^{\frac{k \pi}{\alpha_s}} - \left(\frac{R_s}{R_H} \right)^{-\frac{k \pi}{\alpha_s}} \right) Y_s^*$$

$$\mathbf{F3} = \frac{k \pi}{R_H \alpha_s} \left(\left(\frac{R_s}{R_H} \right)^{\frac{k \pi}{\alpha_s}} - \left(\frac{R_s}{R_H} \right)^{-\frac{k \pi}{\alpha_s}} \right) X_s^*$$

$$\mathbf{W1} = -\frac{\mu_0 \alpha_s}{2} \left(\frac{R_H^2}{R_s} - R_s \right) (J_1 \quad J_2 \quad \dots \quad J_{Q_s})$$

$$\mathbf{U} = \text{diag} \left(-\frac{n \pi}{R_s} \right)$$

$$X_r = \int_{\varphi_{\min-ri}}^{\varphi_{\max-ri}} \sin(n\varphi) \sin \frac{m \pi}{\alpha_r} (\varphi - \varphi_{\min-ri}) d\varphi$$

$$Y_r = \int_{\varphi_{\min-ri}}^{\varphi_{\max-ri}} \cos(n\varphi) \sin \frac{m \pi}{\alpha_r} (\varphi - \varphi_{\min-ri}) d\varphi$$

$$X_r^* = \int_{\varphi_{\min-ri}}^{\varphi_{\max-ri}} \sin(n\varphi) \cos \frac{m \pi}{\alpha_r} (\varphi - \varphi_{\min-ri}) d\varphi$$

$$Y_r^* = \int_{\varphi_{\min-ri}}^{\varphi_{\max-ri}} \cos(n\varphi) \cos \frac{m \pi}{\alpha_r} (\varphi - \varphi_{\min-ri}) d\varphi$$

$$X_s = \int_{\varphi_{\min-sj}}^{\varphi_{\max-sj}} \sin(n\varphi) \sin \frac{k \pi}{\alpha_s} (\varphi - \varphi_{\min-sj}) d\varphi$$

$$Y_s = \int_{\varphi_{\min-sj}}^{\varphi_{\max-sj}} \cos(n\varphi) \sin \frac{k \pi}{\alpha_s} (\varphi - \varphi_{\min-sj}) d\varphi$$

$$X_s^* = \int_{\varphi_{\min-sj}}^{\varphi_{\max-sj}} \sin(n\varphi) \cos \frac{k \pi}{\alpha_s} (\varphi - \varphi_{\min-sj}) d\varphi$$

$$Y_s^* = \int_{\varphi_{\min-sj}}^{\varphi_{\max-sj}} \cos(n\varphi) \cos \frac{k \pi}{\alpha_s} (\varphi - \varphi_{\min-sj}) d\varphi$$

با لحاظ شرایط مرزی ضرایب مجهول \mathbf{a} تا \mathbf{f} به کاررفته به صورت زیر به دست آمد. متغیرهای \mathbf{a} تا \mathbf{f} در (۹) تعریف شده‌اند. در ادامه روابط متغیرهای به کاررفته در (۸) آورده شده است.

$$\mathbf{K1} = n \left(\frac{R_m}{R_s} \right)^n X_r$$

$$\mathbf{K2} = -n \left(\frac{R_m}{R_s} \right)^n Y_r$$

$$\mathbf{K3} = n X_s$$

$$\mathbf{K4} = -n Y_s$$

$$\mathbf{P1} = \text{diag} \left(-\frac{n \pi}{R_s} \left(\frac{R_m}{R_s} \right)^{n-1} \right)$$

$$\mathbf{P2} = \text{diag} \left(\frac{n \pi}{R_s} \left(\frac{R_m}{R_s} \right)^{-n-1} \right)$$

$$\mathbf{E1} =$$

$$\text{diag} \left(\text{diag} \left(-\frac{m \pi}{2} \left(\left(\frac{R_m}{R_r} \right)^{\frac{m \pi}{\alpha_r}} + \left(\frac{R_m}{R_r} \right)^{-\frac{m \pi}{\alpha_r}} \right) \right) \right)$$

$$\mathbf{E2} = \frac{m \pi}{\alpha_r} \left(\left(\frac{R_m}{R_r} \right)^{\frac{m \pi}{\alpha_r}} - \left(\frac{R_m}{R_r} \right)^{-\frac{m \pi}{\alpha_r}} \right) Y_r^*$$

$$\mathbf{E3} = \frac{m \pi}{\alpha_r} \left(\left(\frac{R_m}{R_r} \right)^{\frac{m \pi}{\alpha_r}} - \left(\frac{R_m}{R_r} \right)^{-\frac{m \pi}{\alpha_r}} \right) X_r^*$$

$$\mathbf{F1} =$$

$$\text{diag} \left(\text{diag} \left(-\frac{k \pi}{2} \left(\left(\frac{R_s}{R_H} \right)^{\frac{k \pi}{\alpha_s}} + \left(\frac{R_s}{R_H} \right)^{-\frac{k \pi}{\alpha_s}} \right) \right) \right)$$