



Numerical study of the effect of initial conditions on the behavior of a double physical pendulum

AbdolJabbar Shokri^{1*}, Behrooz Malek-Alkalmi²

¹ Assistant Professor, Payam Noor University, Sanandaj, Iran.

² Associate Professor, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran.

ARTICLE INFO

ABSTRACT

Article history:

Article Type: Research paper

Receive: 25 August 2025

Revise: 29 September 2025

Accept: 17 October 2025

Available online: 23 October 2025

Keywords:

Double pendulum
initial conditions
simulation
Poincaré surface
fast Fourier transform
chaos

The double physical pendulum serves as a mechanical model that effectively demonstrates the complex phenomena of nonlinear dynamic systems, including chaotic behavior. In this study, using the finite element method (FEM) and numerical simulations, the high sensitivity of the system's behavior to initial conditions has been investigated. The results show that changes in initial parameters such as the angle of deviation, length, and mass of the outer pendulum can lead to unpredictable and complex trajectories. For a more detailed analysis, first, a mathematical model for the double physical pendulum was created using Lagrangian mechanics. Then, using numerical calculations and analytical tools such as Fast Fourier Transform (FFT) and Poincaré surface, the effect of changing initial conditions was comprehensively studied. The results showed that increasing the initial deviation angle of the outer pendulum at different values (12, 30, 60, 88, 92, and 128 degrees), as well as increasing the mass and length of the second connecting rod, causes the system's behavior to change from periodic to quasi-periodic and chaotic states. These findings emphasize the importance of initial conditions in predicting the behavior of nonlinear systems and provide valuable insights in the field of nonlinear dynamics.

Cite this article: A.J. Shokri ,B.Malek-Alkalmi“ Numerical study of the effect of initial conditions on the behavior of a double physical pendulum,”. *Applied Electromagnetics*. vol. 13, no. 2, pp. 1-15, 2025.

DOR: <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.26455153.1404.13.2.1.8>



© The Author(s). retain the copyright and full publishing rights



Publisher: Imam Hossein University

مطالعه‌ی عددی تأثیر شرایط اولیه بر رفتار آونگ فیزیکی دوگانه

عبدالجبار شکری^{۱*}، بهروز ملک‌الکلامی^۲

^۱استادیار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

^۲دانشیار، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران

چکیده	مشخصات مقاله
آونگ فیزیکی دوگانه به عنوان مدل مکانیکی، پدیده‌های پیچیده سامانه‌های دینامیکی غیرخطی از جمله رفتار آشوبناک را به خوبی نشان می‌دهد. در این مطالعه، با استفاده از روش اجزاء محدود (FEM) و شبیه‌سازی‌های عددی، حساسیت بالای رفتار این سیستم به شرایط اولیه مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که تغییرات در پارامترهای اولیه مانند زاویه انحراف، طول و جرم آونگ بیرونی، می‌تواند منجر به مسیرهای حرکتی غیرقابل پیش‌بینی و پیچیده شود. برای تحلیل دقیق‌تر، ابتدا با استفاده از مکانیک لاگرانژی، مدل ریاضی برای آونگ دوگانه فیزیکی ایجاد شد. سپس، با استفاده از محاسبات عددی و ابزارهای تحلیلی مانند تبدیل فوریه سریع (FFT) و سطح پوانکاره، تأثیر تغییر شرایط اولیه به طور جامع مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج حاصل نشان داد که افزایش زاویه انحراف اولیه آونگ بیرونی در مقادیر مختلف (12، 30، 60، 88، 92 و 128 درجه)، و همچنین افزایش جرم و طول میله اتصال دهنده دوم، باعث تغییر رفتار سیستم از حالت دوره‌ای به حالت‌های شبه دوره‌ای و آشوبناک می‌شود. این یافته‌ها بر اهمیت شرایط اولیه در پیش‌بینی رفتار سامانه‌های غیرخطی تأکید می‌کند و بینش‌های ارزشمندی در زمینه‌ی دینامیک غیرخطی ارائه می‌دهد.	تاریخچه مقاله: نوع مقاله: علمی - پژوهشی دریافت: 03 شهریور 1404 بازنگری: 07 مهر 1404 پذیرش: 25 مهر 1404 ارائه آنلاین: 01 آبان 1404 کلیدواژه‌ها: آونگ فیزیکی دوگانه شبیه‌سازی سطح پوانکاره تبدیل فوریه سریع آشوب

استناد: عبدالجبار شکری، بهروز ملک‌الکلامی، "مطالعه‌ی عددی تأثیر شرایط اولیه بر رفتار آونگ فیزیکی دوگانه"، *الکترومغناطیس کاربردی*. ۱۳(۲): صص ۱-۱۵. (۱۴۰۵).

DOR: <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.26455153.1404.13.2.1.8>

© نویسنده(گان) حق نشر و حقوق کامل انتشار را برای خود محفوظ می‌دارند.

ناشر: دانشگاه جامع امام حسین(ع).



1- مقدمه

از موضوعات بسیار مهم در حوزه مکانیک کلاسیک بررسی رفتار آونگ است، که به دلیل ماهیت رفتاری آن، یکی از موضوعات جذاب در میان محققان و مهندسين ارتعاشات است. شاید بتوان تاریخچه‌ی آونگ را به دوران گالیله ارتباط داد [1]. هنگامی که او در کلیسا متوجه لوستره‌های بزرگی شد که توسط زنجیرهای از سقف آویزان شده و به این طرف و آن طرف در حال حرکت بودند. تأثیر کشف گالیله بر پیشرفت در قرن‌های بعدی قابل انکار نیست. کشفی که از آن به عنوان تقارن آونگ ساده نام برده می‌شود [2]. علاوه بر گالیله، دانشمندان دیگری مانند هویگنس، نیوتن و هوک که از آنان به عنوان رهبران علم در قرن 17 یاد می‌شود، به مطالعه‌ی آونگ پرداخته‌اند. در میان این اسامی گالیله نقش مرکزی را در دنیای فیزیک نیوتنی بازی می‌کند.

اغراق نیست اگر گفته شود آونگ در مرکز توسعه‌ی مکانیک کلاسیک قرار داشته، به طوری که در طی قرن‌های 18 الی 20 با کارهای استوکس، آتود و اوتوس توسعه یافت است [3]. برای نمونه آونگ فوکو نه تنها شواهدی از چرخش زمین را در اختیار محققان قرارداد بلکه باعث محبوبیت علم در اواخر قرن 19 و اوایل قرن 20 نیز گردید.

آونگ فیزیکی دوگانه، به عنوان سیستم مکانیکی ساده و درعین حال بسیار گویا، همواره مورد توجه فیزیکدانان و مهندسان بوده است. این سیستم، با وجود سادگی ظاهری، رفتارهای دینامیکی بسیار پیچیده‌ای از خود نشان می‌دهد که آن را به مدلی جذاب برای مطالعه پدیده‌های غیرخطی و آشوبناک تبدیل کرده است. از این رو، درک دقیق رفتار دینامیکی آونگ دوگانه، نه تنها به فهم عمیق تری از مکانیک کلاسیک منجر می‌شود، بلکه در طراحی و تحلیل سامانه‌های پیچیده تر مهندسی نیز کاربرد دارد. همچنین از آونگ دوگانه به عنوان ابزار مدل سازی در کاربردهای رباتیک، بیومکانیک و به طور خاص، برای تجزیه و تحلیل جنبه‌های کنترلی رباتیک بازوی انعطاف پذیر و جرقیل‌های کشتی استفاده شده است [4-8].

از جنبه‌های کلیدی در مطالعه سامانه‌های غیرخطی، حساسیت آن‌ها به شرایط اولیه است. این حساسیت، به ویژه در سامانه‌های آشوبناک، باعث می‌شود که تغییرات کوچک در شرایط اولیه، منجر به تغییرات قابل توجهی در رفتار سیستم در بلندمدت شود. آونگ فیزیکی دوگانه، نمونه‌ای برجسته از این نوع سامانه‌ها است. مطالعه دقیق چگونگی تأثیر شرایط اولیه بر رفتار آونگ دوگانه، می‌تواند بینش‌های ارزشمندی در مورد مکانیسم‌های آشوب و همچنین امکان کنترل سامانه‌های غیرخطی فراهم کند [9].

پدیده آشوب متفاوت از حالت بی‌نظمی و کاتوره‌ای است، بلکه ساختاری دارای نظم است که از الگوها و قوانین خاصی پیروی می‌کند، اما پیش‌بینی رفتار آن ممکن نیست [10]. چالش اصلی در کنترل سیستم آونگ دوگانه، به دلیل پیچیدگی ذاتی و دینامیک غیرخطی آن است.

به سامانه‌ای که معادله‌های تحول زمانی آن غیرخطی باشند سامانه‌های غیرخطی گفته می‌شود. برای مثال در آونگ ساده، زمانی که سیستم در شرایط خطی قرار دارد (یعنی زوایای نوسان کوچک هستند و تقریب $\theta \approx \sin(\theta)$ معتبر است)، افزایش دامنه نوسان تنها منجر به تغییرات کمی در کمیت‌هایی مانند مکان و سرعت آونگ می‌شود. به عبارت دیگر، شکل نوسان تقریباً سینوسی باقی می‌ماند و بسامد نوسان تقریباً ثابت است. اما در حالت غیرخطی (زوایای بزرگ)، افزایش دامنه علاوه بر تغییرات کمی، تغییرات کیفی نیز در رفتار آونگ ایجاد می‌کند. این تغییرات کیفی شامل تغییر شکل نوسان از حالت سینوسی به شکل‌های پیچیده تر (ظهور هارمونیک‌ها)، وابستگی بسامد به دامنه (کاهش بسامد با افزایش دامنه)، و در شرایط خاص، ظهور رفتار آشوبناک است. به طور خلاصه، در حالت غیرخطی، انرژی سیستم به طور پیچیده تری با دینامیک آن مرتبط است.

بررسی‌های گسترده‌ای در مورد آونگ دوگانه انجام شده است که طیف وسیعی از رویکردهای نظری، شبیه‌سازی‌های عددی و آزمایش‌های تجربی را در برمی‌گیرد. این مطالعات، پیشرفت‌های قابل توجهی در درک عمیق تر رفتار دینامیکی سامانه‌های غیرخطی، از جمله ویژگی‌های آشوبناک آن، به ارمغان آورده است. در ادامه، به نمونه‌هایی از این تحقیقات اشاره می‌شود.

تران و همکاران [11] رفتار آشوبناک آونگ فیزیکی را با اضافه کردن یک آهنربا، که پیامد آن ایجاد پتانسیل متغیر است، بررسی کردند. آن‌ها با مقایسه‌ی داده‌های آزمایشگاهی و شبیه سازی از طریق نمودارهای چند شاخه‌ای نشان دادند که توافق بسیار خوبی بین نتایج عددی و تجربی وجود دارد. مایتای و همکاران [12] نشان دادند که اگر سرعت چرخش آونگ دوگانه افزایش یابد، گذار از رفتار شبه دوره‌ای به آشوبناک اتفاق می‌افتد و دوباره این روند برعکس می‌شود. روی و همکاران [13] به بررسی رفتار آونگ دوگانه در انرژی‌هایی پایین با در نظر گرفتن شرایط اولیه، پرداختند. آن‌ها نشان دادند که افزایش دامنه منجر به وابستگی بسامد به دامنه خواهد شد که برای دو پیکربندی هم فاز و نا هم فاز متفاوت خواهد بود. استاچوپاک و اکادا [5] با استفاده از تحلیل عددی آشوب و سطح پوانکاره، متوجه شدند که در مقادیر انرژی پایین آونگ رفتار منظم و دوره‌ای دارد و با افزایش سطح انرژی حالت گذار از دوره‌ای به شبه دوره‌ای اتفاق

2-1 تشریح مسئله

در آونگ‌های فیزیکی چون توزیع جرم در طول آونگ پخش شده، بنابراین جمله‌ی گشتاور لختی به معادلات حاکم بر آونگ‌های ساده اضافه می‌شود که خود این باعث تغییراتی در کمیت‌های موردبررسی و الگوهای فضای فاز خواهد شد (شکل 1). در آونگ‌های فیزیکی اگر زاویه انحراف آونگ کوچک باشد بنابراین آونگ به اندازه‌ی بسیار کمی از حالت تعادل منحرف شده، در نتیجه رفتار نوسانی آونگ‌های دوگانه به صورت دوره‌ای خواهد بود. در صورت افزایش زاویه انحراف (افزایش دامنه‌ی نوسان)، نوسانات از حالت دوره‌ای خارج شده و رفتار شبه دوره‌ای و در نهایت آشوبناک از خود نشان می‌دهند. به عبارت دیگر، اگر سطح انرژی افزایش پیدا کند به حرکت‌های آشوبناک منجر خواهد شد [17].

برای مدل سازی پدیده‌های فیزیکی، لازم است معادلات حاکم بر این پدیده‌ها استخراج شود. بسته به نوع آونگ، معادلاتی که استخراج می‌شود، متفاوت خواهد بود. از آنجایی که معادلات حاکم بر آونگ فیزیکی دوگانه در حالت کلی غیرخطی است و در موارد محدودی می‌توان جواب‌های تحلیلی برای آن‌ها پیدا کرد، در نتیجه روش‌های عددی ابزار بسیار مناسبی برای حل این نوع معادلات هستند. علاوه بر این برای بررسی بیشتر و درک تصویر هندسی مسیرهای حرکت به ویژه در آونگ دوگانه، سطح پوانکاره و نمودارهای فوریه با استفاده از روش عناصر متناهی بررسی شده است. در این بخش معادلات حاکم بر آونگ فیزیکی دوگانه با استفاده از مکانیک لاگرانژی استخراج شده است. درواقع مکانیک لاگرانژی روش تحلیلی قدرتمند در فیزیک و مهندسی است که برای توصیف حرکت سامانه‌های دینامیکی، به ویژه سامانه‌های پیچیده و غیرخطی مانند آونگ فیزیکی دوگانه، به کار می‌رود.

2-2 مدل ریاضی

مدل مورد استفاده در این مقاله، آونگ مرکب دوگانه است که از دو میله یکنواخت (OA و AB) با جرم‌ها (m_1 , m_2) و طول‌های (l_1 , l_2) تشکیل شده است (شکل 1). برای آونگ دوگانه معمولاً از دو زاویه θ_1 و θ_2 به عنوان مختصات عمومی که بین هر میله و خط عمودی قرار دارند، استفاده می‌شود. معادلات (1) و (2) انرژی جنبشی (T) و انرژی پتانسیل (V) سیستم را توصیف می‌کنند. انرژی جنبشی شامل عباراتی برای انرژی چرخشی هر میله و تعامل بین حرکات آن‌ها است. انرژی پتانسیل نیز تابعی از زوایای θ_1 و θ_2 است [6].

می‌افتد و در نهایت افزایش بیشتر سطح انرژی رفتار آشوبناک آونگ را به دنبال خواهد داشت. شکری و همکاران [14] با استفاده از محاسبات عددی نشان داد که افزایش زاویه‌ی انحراف آونگ بیرونی منجر به افزایش سطح انرژی سیستم شده که پیامد آن، تغییر رفتار آونگ‌ها از حالت دوره‌ای به شبه دوره‌ای و در نهایت به رفتار آشوبناک برای زوایای بیشتر از 90 درجه است. به طوری که در حالت آشوبناک مقدار سطح انرژی نسبت به حالت دوره‌ای بیشتر از دو برابر افزایش یافته است.

ابزارهای ریاضی که در این مقاله برای مطالعه آونگ‌های فیزیکی دوگانه مورد استفاده قرار گرفتند تبدیل فوریه سریع (FFT) و سطح پوانکاره^۲ است [15، 16]. بسامدهای مربوط به آونگ فیزیکی دوگانه، شامل دو مد اصلی است. برای اینکه بتوان این مد‌ها را از طریق شبیه سازی توصیف کرد از تبدیلات فوریه سریع استفاده شده است. در اصل تبدیل فوریه توابع وابسته به زمان یا فضا را به توابع وابسته به بسامد تبدیل می‌کند [12، 4]. همچنین برای تفسیر رفتار آونگ‌های دوگانه از سطح پوانکاره، به عنوان ابزاری بسیار پرکاربرد و قدرتمند، استفاده گردید. درواقع سطح پوانکاره یک صفحه‌ی گذرنده از دیاگرام فضای فاز است که برای ساده تر کردن نمایش فضای فاز اختراع شده است [15].

در این مقاله، تأثیر شرایط اولیه بر رفتار دینامیکی آونگ فیزیکی دوگانه با استفاده از محاسبات عددی و شبیه سازی مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش اول، به مقدمه و پیشینه پژوهش اشاره شد. در بخش دوم، مدل ریاضی حاکم بر سیستم و معادلات حرکت با استفاده از رویکرد دینامیک لاگرانژی فرمول بندی شده است. در بخش سوم، نتایج حاصل از شبیه سازی با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع و نمایش سطح پوانکاره مورد تجزیه و تحلیل کمی و کیفی قرار گرفته اند. هدف اصلی این مطالعه، دستیابی به درک عمیق تری از رفتار سامانه‌های غیرخطی و ارزیابی میزان حساسیت آن‌ها به تغییرات شرایط اولیه، هست.

2- مبانی و روش‌ها

برای اینکه بتوان سیستم واقعی را مورد بررسی قرارداد ابتدا باید از آن یک مدل ساخت، چراکه می‌توان در مدل تغییراتی را اعمال کرد که در حالت واقعی بسیار سخت، هزینه‌بردار و یا غیرممکن است. بنابراین در این بخش ابتدا مسئله مورد نظر تشریح شده و سپس مدل ریاضی معرفی شده است.

¹ . Fast Fourier Transform

² . Poincare

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}, \quad \lambda = \frac{l_2}{l_1}, \quad \tau = \omega_n t \quad (7)$$

که در آن $\omega_n^2 = g/l$ است، پس معادلات در برحسب کمیت‌های بدون بعد به صورت زیر درمی‌آیند:

$$(6\mu + 2)\ddot{\theta}_1 + 3\lambda\mu \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 + 3\lambda\mu \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2 + (6\mu + 3)\sin\theta_1 = 0 \quad (8)$$

$$3\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 + 2\lambda\ddot{\theta}_2 - 3\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2 + 3\sin\theta_2 = 0 \quad (9)$$

برای نوسانات کوچک، معادلات حرکت (8) و (9) خطی سازی شده‌اند و به معادلات زیر تقلیل پیدا می‌کنند:

$$(6\mu + 2)\ddot{\theta}_1 + 3\lambda\mu\ddot{\theta}_2 + (6\mu + 3)\theta_1 = 0 \quad (10)$$

$$3\ddot{\theta}_1 + 2\lambda\ddot{\theta}_2 + 3\theta_2 = 0 \quad (11)$$

با فرض جواب‌های نوسانی $\theta_1 = A_1 \cos(\omega\tau)$ و $\theta_2 = A_2 \cos(\omega\tau)$ برای معادلات (10) و (11)، پس از ساده‌سازی بسامدها طبیعی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\omega_1 = \sqrt{3} \sqrt{\frac{\eta + \kappa - \sqrt{\eta^2 + \kappa^2 + \lambda(-2 - \mu + 6\mu^2)}}{\lambda(4 + 3\lambda)}} \quad (12)$$

$$\omega_2 = \sqrt{3} \sqrt{\frac{\eta + \kappa + \sqrt{\eta^2 + \kappa^2 + \lambda(-2 - \mu + 6\mu^2)}}{\lambda(4 + 3\lambda)}} \quad (13)$$

که در آن $\kappa = \lambda + 2\lambda\mu$ و $\eta = 1 + 3\mu$ هست.

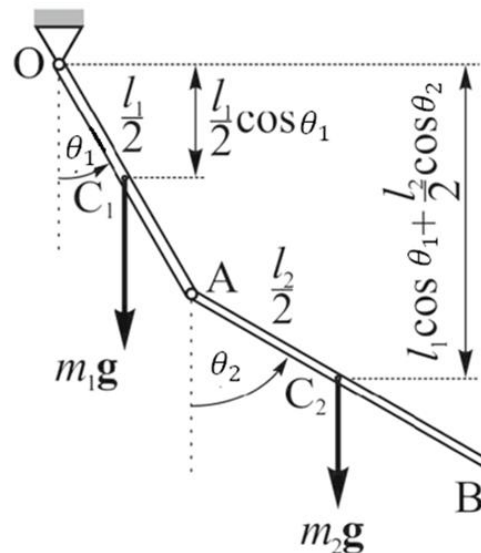
برای حالتی که در آن دو آونگ فیزیک از نظر جرم و طول یکسان باشند ($\mu = 1, \lambda = 1$) برای بسامدها مقادیر زیر حاصل می‌شود:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3}{7}(7 - 2\sqrt{7})} = 0.8557 \quad (14)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3}{7}(7 + 2\sqrt{7})} = 2.2952 \quad (15)$$

3- نتایج و بحث

در این بخش با استفاده از نرم‌افزار کامسول چهار حالت مشروح-ی زیر بررسی شده است. اولین حالت زاویه انحراف 12 درجه برای آونگ بیرونی و 6 درجه برای آونگ درونی، حالت‌های دوم و سوم به ترتیب، زاویه انحراف 30 و 60 درجه برای آونگ بیرونی و صفر درجه برای آونگ درونی، که در هر سه حالت فوق طول هر کدام از آونگ‌ها و یکسان و برابر 50 cm سانتیمتر انتخاب شده است. برای حالت چهارم با ثابت نگه داشتن جرم، طول آونگ بیرونی دو



شکل (1). شماتیک آونگ فیزیکی دوگانه [17].

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{3} + m_2 \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2 l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (1)$$

$$V = -\frac{1}{2} g (l_1(m_1 + 2m_2) \cos\theta_1 + l_2 m_2 \cos\theta_2) \quad (2)$$

برای به دست آوردن معادلات حرکت سیستم، از معادلات لاگرانژی استفاده می‌شود. این معادلات به صورت زیر هستند [6]:

$$L = T - V = T(\dot{q}, q) - V(q) \quad (3)$$

که در آن $T(\dot{q}, q)$ انرژی جنبشی و $V(q)$ انرژی پتانسیل کل سیستم است. لازم به ذکر است که در اینجا $V(q)$ تنها تابعی از مختصات تعمیم‌یافته q است. برای استخراج معادلات حرکت از معادلات لاگرانژی زیر استفاده شده است [18]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (4)$$

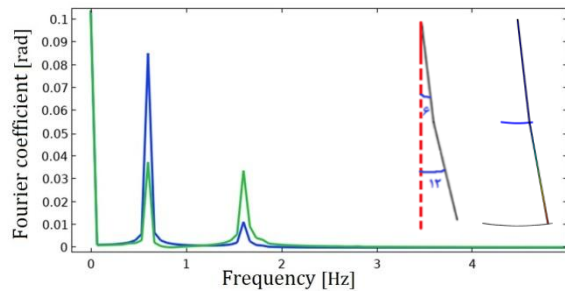
که برای سیستم آونگ فیزیکی دوگانه به صورت زیر خواهد بود:

$$\left(\frac{m_1}{3} + m_2 \right) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{m_2 l_1 l_2}{2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + \frac{m_2 l_1 l_2}{2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \left(\frac{(m_1 + 2m_2) g l_1}{2} \right) \sin\theta_1 = 0 \quad (5)$$

$$\frac{m_2 l_1 l_2}{2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + \frac{m_2 l_2^2}{3} \ddot{\theta}_2 - \frac{m_2 l_1 l_2}{2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 g l_2}{2} \sin\theta_2 = 0 \quad (6)$$

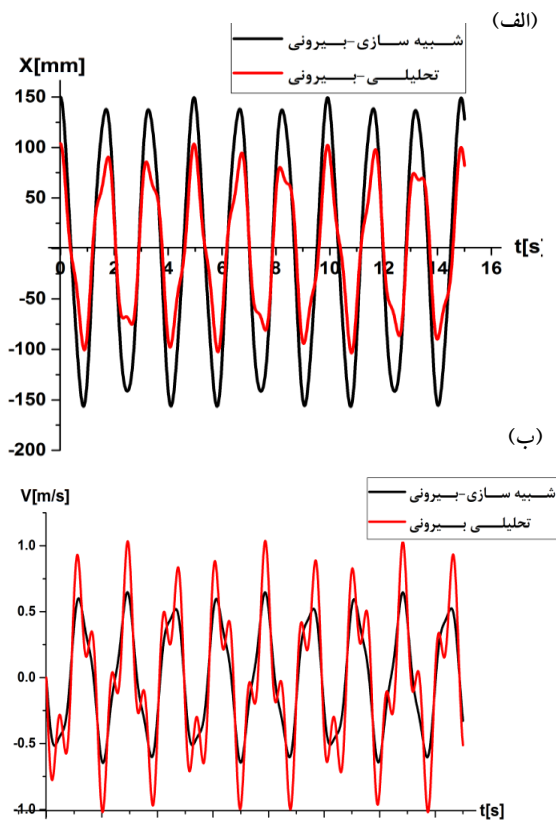
معادلات (5) و (6) معادلات جفت شده و غیرخطی هستند. برای راحتی کار از پارامترهای بدون بعد زیر استفاده شده است:

مسیر کمائی شکل که کمی بزرگ‌تر از مسیر آونگ درونی است، نوسان می‌کند.



شکل (2). تبدیل فوری سریع برای زاویه انحراف 6 و 12 درجه (رنگ آبی آونگ درونی و رنگ سبز آونگ بیرونی).

مقایسه نتایج شبیه‌سازی با نتایج تحلیلی یکی از موارد مهم در مطالعات علمی است زیرا با این کار اعتبار روش شبیه‌سازی سنجیده می‌شود. بنابراین، فقط در این قسمت برای اعتبار سنجی نتایج شبیه‌سازی، نتایج به‌دست‌آمده از روش شبیه‌سازی و روش تحلیلی برای نمودارهای نوسانات مکان و سرعت مربوط به آونگ بیرونی، در آونگ فیزیکی دوگانه، مقایسه شده است.



شکل (3). مقایسه نمودار شبیه‌سازی و تحلیل آونگ بیرونی برای (الف) تغییرات مکان و (ب) تغییرات سرعت برحسب زمان.

شکل (3-الف) نمودار تغییرات مکان برحسب زمان برای حالت شبیه‌سازی و تحلیلی فقط برای آونگ بیرونی را نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود برای آونگ بیرونی الگوی تغییر مکان در حالت شبیه‌سازی به‌صورت منظم بوده درحالی‌که

برابر شده است. همچنین در محاسبات از نیروهای اتلافی از جمله اصطکاک سطوح و هوا چشم‌پوشی شده است. در بخش بعدی با استفاده از نرم‌افزار میپل، فضای فاز و سطح پوانکاره برای تعیین شرایط دوره‌ای، شبه‌دوره‌ای و آشوبناک آونگ فیزیکی دوگانه در هفت حالت مختلف بررسی خواهد شد.

3-1 تحلیل عددی رفتار آونگ با نرم‌افزار کامسول

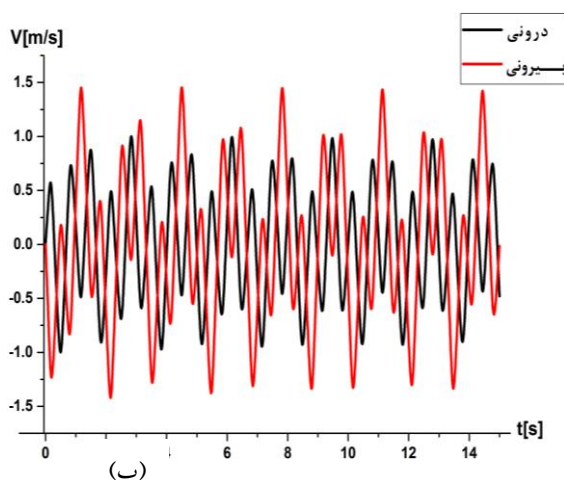
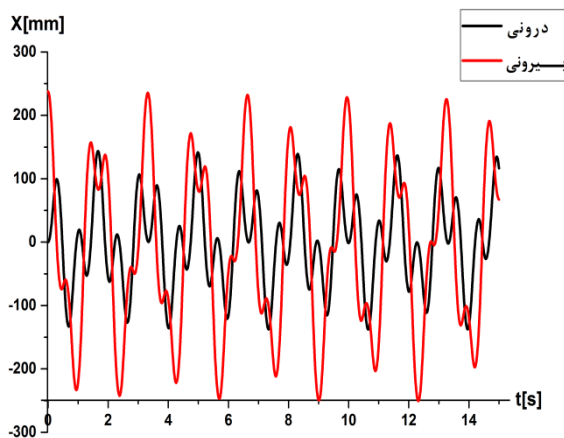
مدهای نوسانی در آونگ فیزیکی دوگانه به نحوه‌ی حرکت و برهم‌کنش دو آونگ با یکدیگر بستگی دارند. این سیستم دو درجه آزادی دارد و در نتیجه دو مد نوسانی مستقل (متقارن و نامتقارن) دارد که با بسامدهای مختلف نوسان می‌کنند. در مد متقارن که با بسامد بالاتر نوسان می‌کند، دو آونگ باهم و در یک‌جهت نوسان می‌کنند. اما در مد نامتقارن، دو آونگ در خلاف جهت یکدیگر نوسان می‌کنند و دارای مد بسامد پایین‌تری هستند، زیرا وقتی دو جرم در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند در نتیجه بسامد نوسانی آن‌ها کاهش می‌یابد. در مورد آونگ فیزیکی دوگانه، انتظار می‌رود دو قله‌ی اصلی در نمودار تبدیل فوری مشاهده شود که مربوط به دو مد نوسانی متقارن و نامتقارن است که در این قسمت با استفاده از شبیه‌سازی بررسی شده است. لازم به یادآوری است که تمام بسامدها (f) برحسب هرتز (Hz) هست.

3-1-1 حالت اول (زاویه 12 درجه)

برای حالت اول زاویه انحراف آونگ بیرونی 12 درجه و زاویه آونگ درونی 6 درجه فرض شده است (نمای از آونگ فیزیکی دوگانه در زمینه‌ی شکل (2)). در شکل (2) نمودار تبدیل فوری سریع (FFT) برای آونگ فیزیکی دوگانه ترسیم شده است. همان‌طور که از شکل ملاحظه می‌شود دو مد طبیعی از نمودار قابل مشاهده است که مقدار هرکدام از این مدها بر اساس محاسبات تحلیلی (معادلات 10 و 11) به ترتیب به بسامدهای با مقادیر 0/65 هرتز و 1/75 هرتز مرتبط است. نتایج به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی تفاوت کمی با مقادیر تحلیلی دارد. در اینجا تفاوت عمده با مورد مشابه در مدل آونگ دوگانه ساده [14] دیده می‌شود و آن بیشتر بودن زاویه‌ی انحراف آونگ درونی نسبت به بیرونی در مد اول است.

یکی دیگر از کمیت‌های جالب‌توجه در شبیه‌سازی آونگ‌های دوگانه بررسی مسیر حرکت آونگ در صفحه‌ی قائم ($x-y$) است که در زمینه‌ی شکل (2) نشان داده شده است. با توجه به شکل کاملاً مشخص است که آونگ درونی به دلیل داشتن یک درجه آزادی فقط بر روی مسیر مقعر حرکت می‌کند. همچنین مسیر حرکت آونگ بیرونی، مشابه با آونگ درونی است و بر روی

شکل (۵-الف) روند تغییرات مکان در طی ۱۵ ثانیه برای آونگ فیزیکی دوگانه را نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل ملاحظه می‌شود نوسانات آونگ بیرونی از لحاظ دامنه نوسان و نوسانات ریز در طول مسیر تفاوت زیادی با آونگ درونی دارد. چون این دو آونگ در حین نوسان روی همدیگر تأثیر می‌گذارند نمی‌توان انتظار داشت که نوسانات آن‌ها شبیه هم باشد. اما الگوی نوسانات برای هر دو هر ۴ ثانیه یک‌بار تکرار شده است.



شکل (۵). نمودار (الف) تغییرات مکان و (ب) سرعت در طول زمان برای زاویه انحراف ۳۰ درجه.

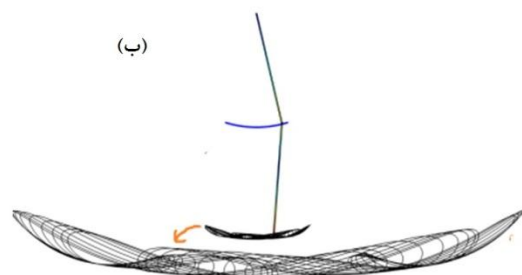
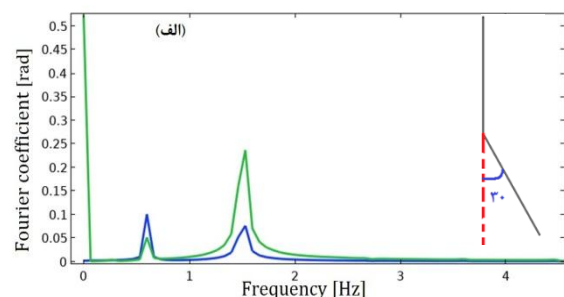
نمودار تغییرات سرعت هر دو نوسانگر در مدت ۱۵ ثانیه در شکل (۵-ب) ترسیم شده است. در لحظه شروع سرعت هر دو آونگ صفر است. بر اساس نمودار بیشترین سرعت برای آونگ درونی در اولین بار حوالی ۰/۵ ثانیه بوده که مقدار آن تقریباً 0.5 m/s است و برای آونگ بیرونی در همان زمان مقدار 1.25 m/s ثبت شده است. در اینجا رفتار نوسانی شبه دوره‌ای آونگ قابل مشاهده است. درواقع با تغییر در شرایط اولیه آونگ‌ها، رفتار آن‌ها تغییر کرده و پیش‌بینی سیستم با گذشت زمان سخت می‌شود. مقدار سرعت برای آونگ بیرونی در روش تحلیل با توجه به پایداری انرژی مکانیکی 1.18 m/s هست درحالی‌که در روش شبیه‌سازی بیشترین مقدار را 1.45 m/s به دست آمده است.

نتایج تحلیلی نوسانات ریز در داخل نوسان اصلی (تغییرات نوسانی زیاد در مقابل تغییرات بسیار منظم و قابل پیش‌بینی روش شبیه‌سازی) را نشان می‌دهد، اگرچه در کل شباهت زیادی بین هر دو روش وجود دارد، اما میزان جابجای نوسانات تفاوت قابل ملاحظه‌ای باهم دارند.

در شکل (۳-ب) نتایج به دست آمده از روش شبیه‌سازی و روش تحلیلی برای تغییرات سرعت نسبت به زمان در بازه زمانی ۱۵ ثانیه نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل ملاحظه می‌شود نوسانات در روش شبیه‌سازی منظم‌تر هستند اما در روش تحلیلی در مسیر نوسان اصلی نوسانات زیادی وجود دارد که قابل توجه است. اگرچه روندها نسبتاً یکسان می‌باشند، اما از لحاظ مقدار در طول مسیر متفاوت هستند. این تفاوت ناشی از تقریب‌های است که در مدل‌سازی استفاده شده است.

۳-۱-۲. حالت دوم (زاویه ۳۰ درجه)

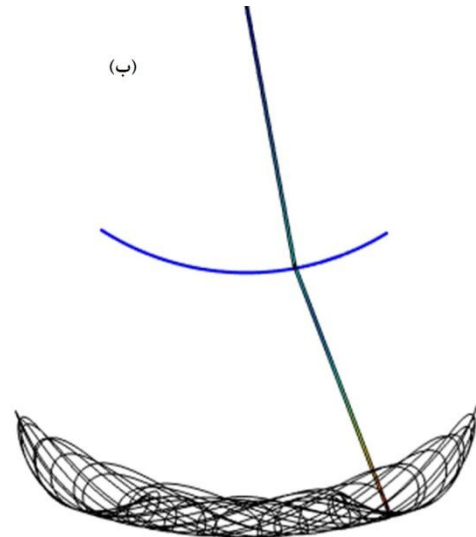
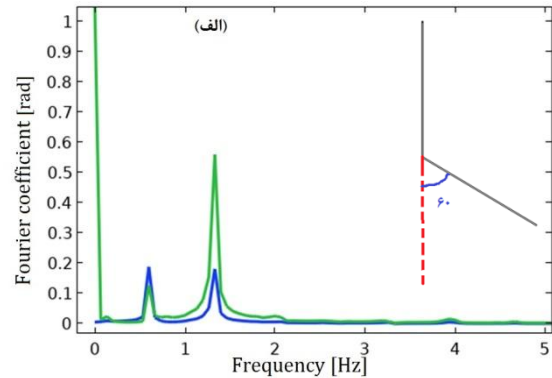
برای حالت دوم زاویه انحراف آونگ بیرونی را تا ۳۰ درجه افزایش و زاویه آونگ درونی را صفر در نظر گرفته شد که نمای آن در زمینه شکل (۴-الف) به تصویر کشیده شده است. با توجه به شکل (۴-الف) ملاحظه می‌شود که تعداد مدهای طبیعی همانند حالت قبلی نیز دو مد است که در آن مقدار انحراف آونگ درونی بیشتر از آونگ بیرونی برای مد اول بوده و در مد دوم این روند برعکس می‌شود. علاوه بر این، با توجه به شکل (۴-ب) مشاهده می‌شود که مسیر حرکت آونگ بیرونی نسبت به حالت اول تغییر چشمگیری داشته است. در این حالت می‌توان گفت که سیستم از حالت دوره‌ای خارج شده و به حالت شبه دوره‌ای درآمده است.



شکل (۴). (الف) تبدیل فوری سریع برای زاویه ۳۰ درجه و (ب) مسیر حرکت آونگ‌های درونی و بیرونی.

3-1-3. حالت سوم (زاویه 60 درجه)

حالت سوم به بررسی زاویه انحراف 60 درجه‌ی آونگ بیرونی اختصاص داده شده است که تصویر آن در زمینه شکل (6-الف) مشاهده می‌شود.



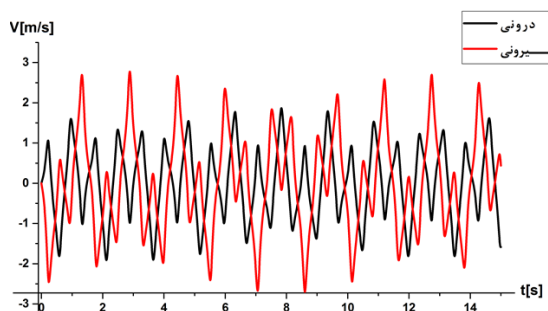
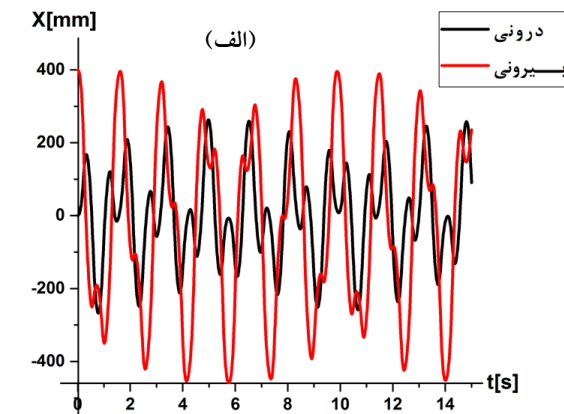
شکل (6). (الف) تبدیل فوری سریع برای زاویه 60 درجه و (ب) مسیر حرکت آونگ‌هایی بیرونی و درونی.

در این حالت با افزایش زاویه‌ی انحراف آونگ بیرونی تا دو برابر، منجر به تغییراتی در الگوی تبدیل فوری سریع شده است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود در مد اول انحراف نوسانگر درونی بیشتر از بیرونی بوده و همچنین قله‌های بسیار کوچکی دیده می‌شود. همچنین در شکل (6-ب) مسیر حرکت هر دو آونگ نشان می‌دهد الگو همانند الگوی مربوط به زاویه‌ی 30 درجه بوده با این تفاوت که مساحت ناحیه‌ای که نوسانگر در حال جاروب است بیشتر است و نشان از تغییر رفتار آونگ فیزیکی دوگانه دارد.

در شکل (7-الف) برای آونگ درونی رفتار شبه‌دوره‌ای مشهود است به‌طوری‌که برای اولین بار و در حوالی ثانیه‌ی دوم به بالاترین دامنه‌ی نوسان دست پیدا می‌کند. همان‌طور که در موارد قبلی اشاره شده. در اینجا نیز نوسانات کوچکی در داخل نوسان

اصلی در طول نوسان قابل مشاهده است. در اینجا نیز اگر به قله این نوسانات نگاه کنیم ملاحظه می‌گردد از شروع حرکت تا حوالی ثانیه‌ی ششم مکان این قله با شیب ملایم در حال جابجایی به سمت مکان‌های منفی است و بعد از آن تا لحظه‌ی 10 ثانیه موقعیت آن در حال صعود هست. با توجه به نمودار می‌توان حدس زد چنین روندی تکرار خواهد شد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در مد اول انحراف نوسانگر درونی بیشتر از بیرونی بوده و در مد دوم برعکس، همچنین قله‌های بسیار کوچکی دیده می‌شود. تقریباً در زمان 4 ثانیه نوسانگر بیرونی برای اولین بار به بیشتر فاصله‌ی $x = 0.8$ می‌رسیده که در سمت منفی محور x قرار دارد. (ب) این مقدار در مقایسه با مکان اولیه نوسانگر در زمان صفر، بیشتر است. نکته جالب توجه در رفتار آونگ بیرونی مشاهده‌ی رفتار سینوسی در طی زمان طی شده است. به این صورت که اگر تمام قله‌ها و دره‌های نمودار را به همدیگر وصل کنیم یک پوش تشکیل می‌شود که خودپوش نمودار سینوسی است.

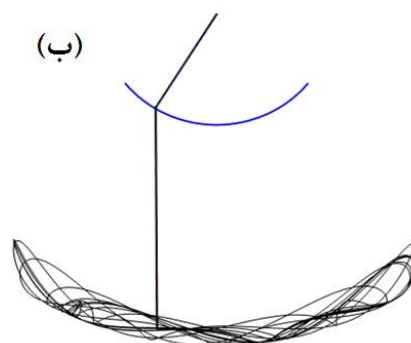
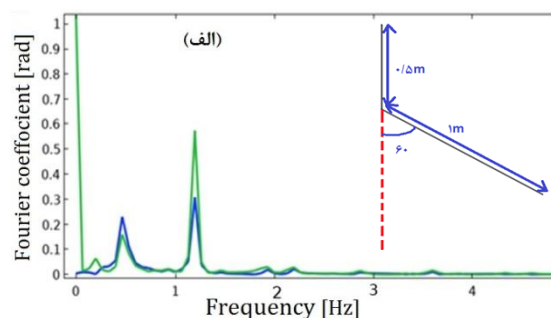
نمودار بعدی، شکل (7-ب)، تغییرات سرعت را نشان می‌دهد. اولین باری که سرعت نوسانگر درونی بیشترین سرعت را کسب می‌کند به ثانیه‌ی 0/6 مربوط می‌شود و برای نوسانگر بیرونی در حوالی ثانیه 4/5 هست (2.66 m/s). افزایش زاویه‌ی انحراف آونگ بیرونی باعث افزایش دامنه‌ی سرعت در نوسانگر درونی شده، به‌طوری‌که مقدار آن در حدود 1.75 m/s است.



شکل (7). (الف) نمودار تغییرات مکان و (ب) نمودار سرعت در طول زمان برای زاویه انحراف 60 درجه.

3-1-4. حالت چهارم (زاویه 60 درجه و $l_2 = 2l_1$)

در این حالت طول آونگ بیرونی را تا دو برابر افزایش و از زاویه 60 درجه نسبت به خط قائم رها می‌شود (زمینه شکل 8-الف). ساختار جدید آونگ دوم باعث کاهش در مد اول نوسان می‌گردد. اگر به جزئیات نمودار دقت شود قبل از مد متقارن یک قله برای نوسانگر بیرونی قابل مشاهده است و همچنین بعد از مد نوسانی بعدی تعدادی قله بسیار ریز قابل توجه است. بنابراین، علاوه بر دو قله اصلی، قله‌های کوچک‌تری نیز در نمودار تبدیل فوریه مشاهده می‌شوند. این مدهای ریز می‌توانند دلایل مختلفی داشته باشند: یکی هارمونیک‌ها، که ضرب‌های صحیحی از بسامدهای اصلی هستند و معمولاً به دلیل غیرخطی بودن سیستم نوسانی ایجاد می‌شوند. دیگری ناشی از برهمکنش بین دو مد نوسانی در آونگ فیزیکی دوگانه است که می‌تواند منجر به ایجاد مدهای ریز جدید شود.

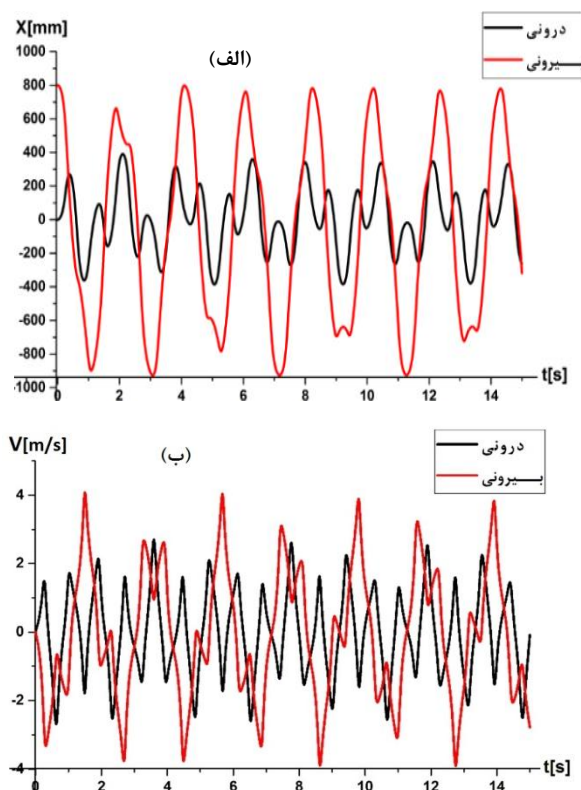


شکل (8). الف) تبدیل فوریه سریع برای زاویه 60 درجه و ب) مسیر حرکت آونگ‌هایی درونی و بیرونی ($m_2 = m_1$, $l_2 = 2l_1$).

مسیر حرکت هر دو نوسانگر (شکل 8-الف) نشان می‌دهد که میزان تقعر مسیر حرکت آونگ درونی بیشتر از مورد قبلی بود و همچنین تغییرات نسبتاً متفاوتی در مسیر حرکت برای آونگ بیرونی نسبت به شکل (6-ب) مشاهده می‌گردد.

در شکل (9-الف) تغییرات مکان برحسب زمان ترسیم شده است. همان‌طور که از شکل ملاحظه می‌شود نمودار مکان تفاوت قابل توجهی با موارد قبلی دارد. تغییرات مکان برای نوسانگر درونی شبه دوره‌ای بوده و در زمان 2 ثانیه به بیشترین مقدار در سمت مثبت‌ها می‌رسد. در مقایسه با حالت‌های قبلی، مشاهده

می‌شود که دامنه‌ی نوسانات بیشتر شده که خود ناشی از افزایش طول میله‌ی نوسانگر بیرونی است. درواقع افزایش طول، افزایش گشتاور را به دنبال داشته و این عامل جابجایی بیشتر این نوسانگر است. اگر به روند جابجایی مکان نوسانگر بیرونی توجه شود، الگوی نسبتاً منظمی دیده می‌شود اگرچه نوسانات بسیار کوچکی قابل ملاحظه است. همچنین در مقایسه با حالت قبلی در اینجا تغییرات کند تر است. بیشترین فاصله‌ی این آونگ از نقطه-ی تعادل در زمان ثانیه‌ی سوم روی داده که در حدود 100 میلی‌متر بیشتر از مکان اولیه در زمان صفر است.

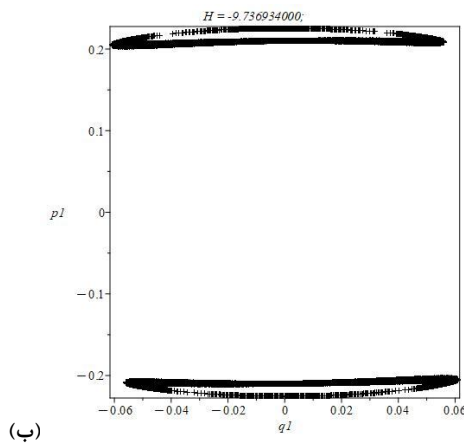
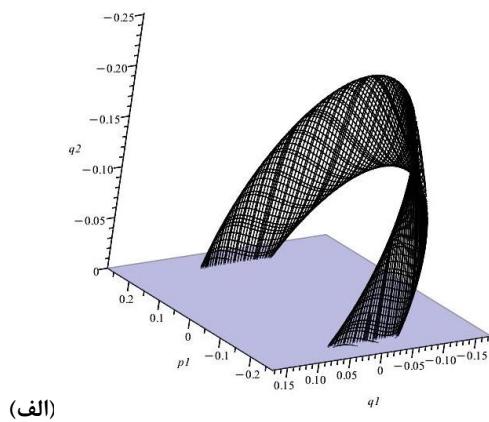


شکل (9). الف) نمودار تغییرات مکان و ب) سرعت در طی زمان برای زاویه 60 درجه و ($m_2 = m_1$, $l_2 = 2l_1$).

در شکل (9-ب) نمودار سرعت-زمان آونگ فیزیکی دوگانه ترسیم شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در زمان 0/63 ثانیه اولین باری است که نوسانگر درونی به بیشترین سرعت در جهت خلاف محور Δ ها رسیده که در حدود 2.7 m/s هست. برای نوسانگر خارجی بیشترین سرعت 4.05 m/s است که در زمان 1/5 ثانیه ثبت شده که در مقایسه با نوسانگر داخلی تأخیر زمانی حدود 0/9 ثانیه را نشان می‌دهد. درحالی‌که با توجه به پایداری انرژی مکانیکی مقدار بیشینه‌ی سرعت نوسانگر بیرونی در حدود 4.42 m/s است.

همان‌طور که از شکل‌های 2، 4، 6 و 8-الف ملاحظه می‌شود در بسامد نزدیک صفر، یک قله وجود دارد. علت وجود این قله‌ها در بسامد نزدیک به صفر در طیف فوریه می‌تواند ناشی از

در شکل (10-ب) سطح پوانکاره برای این حالت از نوسان ترسیم شده است. با توجه به شکل دو مسیر بسته قابل مشاهده است که این دو مسیر بسته از برخورد نمودار فضای فاز با صفحه θ_2 ایجاد شده است. وجود چنین مسیرهایی نشان از رفتار دوره-ای در طول زمان است. نقاطی که در مرکز هریک از این مسیرها قرار دارد نقاط تعادل یا پایداری سیستم است که در اینجا این نقاط دارای جابجایی نسبی نسبت به همدیگر هستند. در حقیقت الگوی سطح پوانکاره رفتار منظم و دوره‌ای سیستم در طول زمان را نشان می‌دهد. از شکل (10) قابل ملاحظه است که رفتار آونگ فیزیکی دوگانه در این حالت دوره‌ای است، همان‌طور که نمودار مربوط به تغییر مکان شکل (3-الف) نیز این موضوع را تأیید می‌کند.



شکل (10). (الف) فضای فاز سه‌بعدی و (ب) سطح پوانکاره برای زاویه انحراف 6 درجه آونگ درونی و 12 درجه آونگ بیرونی.

3-2-2. حالت دوم (زاویه 30 درجه)

با افزایش زاویه انحراف آونگ بیرونی به 30 درجه و تقلیل زاویه آونگ داخلی به صفر، در الگوی فضای فاز و سطح پوانکاره تفاوت فراوانی مشاهده گردید (شکل (11)). در شکل (11) دو دایره مشاهده می‌شود که در قسمت میانی دارای اشتراک هستند و

وجود یک مقدار ثابت در سیگنال اصلی در تجزیه فوریه باشد، یا اینکه گاهی اوقات، خطاهای موجود در ابزارهای اندازه‌گیری یا الگوریتم‌های پردازش سیگنال می‌توانند باعث ایجاد این نوع قله‌ها شوند.

3-2. تحلیل عددی سطح پوانکاره با نرم‌افزاری پل

فضای فاز ابزاری قدرتمند در دینامیک سامانه‌ها است که برای توصیف وضعیت سیستم در هر لحظه از زمان به کار می‌رود. برای آونگ دوگانه، فضای فاز شامل تمام حالت‌های ممکن سیستم است که می‌تواند شامل موقعیت و سرعت هر دو آونگ باشد. فضای فاز آونگ دوگانه می‌تواند به صورت فضای چهاربعدی $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ تصور شود که در آن هر نقطه نشان‌دهنده حالت خاص از سیستم است. به عنوان مثال، یک نقطه خاص در این فضا می‌تواند نشان‌دهنده ترکیب خاص از زاویه‌ها و سرعت‌ها باشد. با استفاده از مختصات فضای فاز، می‌توان رفتار دینامیکی آونگ دوگانه را که به صورت منحنی‌هایی در این فضا است، تحلیل کرد. برای تحلیل رفتار آونگ دوگانه در فضای فاز، معمولاً از روش‌های عددی و شبیه‌سازی استفاده می‌شود.

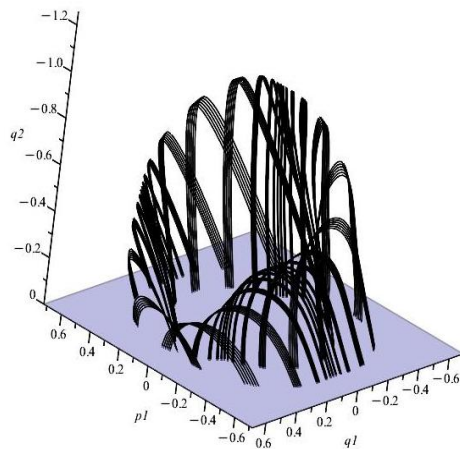
سطح پوانکاره که توسط ژول هنری پوانکاره ریاضیدان-فیزیکدان فرانسوی، اختراع شد، ابزار مفید و مهم در تحلیل دینامیک سامانه‌های غیرخطی و آشوبناک مانند آونگ دوگانه است. با استفاده از این ابزار، می‌توان به درک بهتری از ویژگی‌های پیچیده این سیستم دست یافت و الگوهای حرکتی سیستم را شناسایی و رفتارهای آشوبناک را تحلیل کرد. این ابزار کمک می‌کند تا رفتار سیستم را به صورت بصری و قابل فهم‌تر مشاهده کرد. تشخیص رفتارهای دوره‌ای یا آشوبناک با تحلیل سطح پوانکاره به دست می‌آید. به این ترتیب که اگر نقاط در الگوهای مشخص و تکراری قرار گیرند، این می‌تواند نشان‌دهنده رفتارهای دوره‌ای سیستم باشد. اما اگر نقاط در سطح پوانکاره به صورت تصادفی و پراکنده توزیع شوند، این می‌تواند نشان‌دهنده رفتار آشوبناک سیستم باشد.

در این بخش به طور کلی هفت حالت متفاوت برای تعیین رفتار آونگ‌ها بررسی شده است. فقط در حالت اول زاویه انحراف آونگ درونی را 6 درجه انتخاب شده اما در بقیه حالت‌ها برای درک بهتر مسئله این زاویه صفر در نظر گرفته شده است.

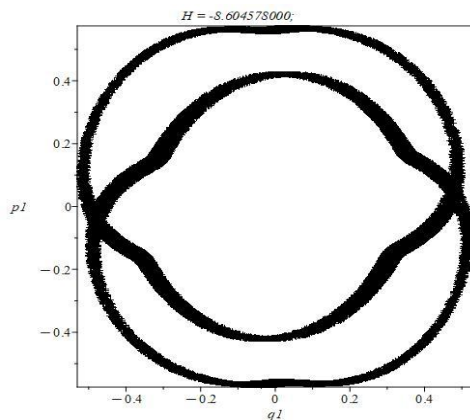
3-2-1. حالت اول (زاویه 12 درجه)

در شکل (10-الف) فضای فاز برای زاویه‌های 12 و 6 درجه در سه بعد نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود تشخیص نوع نوسان (دوره‌ای، شبه دوره‌ای یا آشوبناک) از روی این تصویر غیرممکن است. بنابراین، برای تعیین نوع نوسان از تکنیک سطح پوانکاره استفاده می‌شود.

می‌دهد شکل دایره‌ها به حالت قلب تغییر فرم داده‌اند که مانند حالت قبلی رفتار شبه دوره‌ای را تأیید می‌کند.



(الف)



(ب)

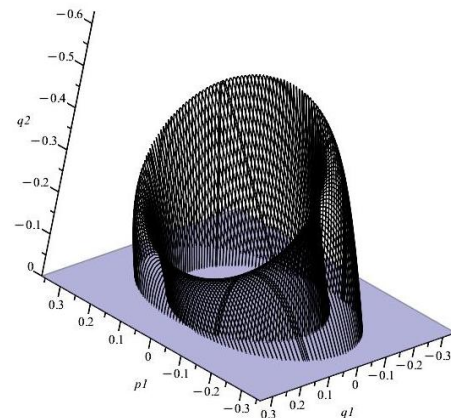
شکل (12). (الف) فضای فاز سه‌بعدی و (ب) سطح پوانکاره برای زاویه انحراف 60 درجه.

حالت شبه‌دوره‌ای نوع خاص از حرکت است که می‌تواند در سامانه‌های آونگ دوگانه رخ دهد. در حالت شبه‌دوره‌ای، سیستم برای مدتی رفتاری تقریباً دوره‌ای از خود نشان می‌دهد، اما این رفتار کاملاً تکراری نیست. به عبارت دیگر، سیستم ممکن است یک سری نوسانات را تکرار کند، اما دوره زمانی دقیق این نوسانات ممکن است کمی متفاوت باشد.

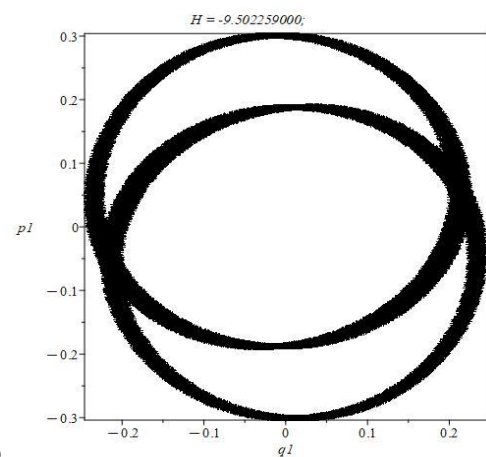
3-2-4. حالت چهارم (زاویه 60 درجه و $l_2 = 2l_1$)

در این بخش حالتی بررسی شده که در آن با ثابت نگه‌داشتن زاویه، طول آونگ بیرونی تا دو برابر افزایش پیدا کرده است. همان‌طور که در شکل (13-الف) مشاهده می‌شود فضای فاز تفاوت قابل‌توجهی با حالت قبلی (شکل 12-الف) دارد. همچنین سطح پوانکاره ناشی از این فضای فاز اختلاف عمده‌ای با حالت فوق دارد (شکل 13-ب). همان‌طور که مشخص است اینجا دو جزیره با مساحت کوچک‌تر وجود دارد و عملاً هیچ ناحیه‌ی مشترکی دیده نمی‌شود، اما نسبت به هم متقارن هستند. از طرف دیگر محیطی که این جزیره‌ها را تشکیل می‌دهد از لحاظ ضخامت

مرکز آن‌ها نسبت به هم جابجا شده است. ضخامت محیط این دایره‌ها یکسان نیست و نشان از رفتار شبه دوره‌ای سیستم دارد.



(الف)



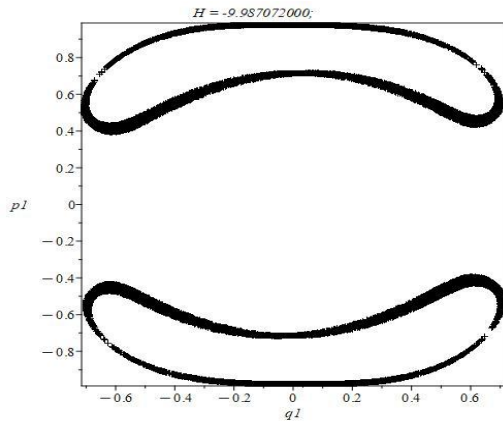
(ب)

شکل (11). (الف) فضای فاز سه‌بعدی و (ب) سطح پوانکاره برای زاویه انحراف 30 درجه آونگ بیرونی.

اختلاف بسیار کم در سطح انرژی نسبت به حالت اول کاملاً مشهود است، اگرچه الگوهای ایجادشده تفاوت زیادی باهم دارند. به عبارت دیگر، همان‌طور که از روی شکل مشخص است، در حالت اول دو ناحیه از هم جدا هستند، اما در این حالت، علاوه بر تغییر شکل و افزایش مساحت، همدیگر را نیز قطع کرده‌اند. تغییر این نواحی نشان از تغییر رفتار سیستم به دلیل افزایش نسبتاً کم سطح انرژی است، اگرچه هنوز رفتار آشوبناک مشاهده نمی‌گردد.

3-2-3. حالت سوم (زاویه 60 درجه)

با افزایش زاویه انحراف به دو برابر حالت دوم، یعنی برای زاویه انحراف 60 درجه، با رسم فضای فاز و سطح پوانکاره می‌توان پی برد که مسیر هرکدام از اوربیتال‌ها در فضای فاز الگویی مشابه حالت دوم است، اما در فواصلی دورتر از هم (شکل 12-الف). درحالی‌که الگوی سطح پوانکاره نشان از تغییر شکل مسیر به‌جامانده از مدارها در سطح را می‌دهد. همان‌طور که شکل نشان



(ب)

شکل (13). الف) فضای فاز سه بعدی و ب) سطح پوانکاره با زاویه انحراف 60 درجه برای آونگ دومی ($m_2 = m_1$, $l_2 = 2l_1$).

5-3-2. حالت پنجم (زاویه 128 درجه)

در این حالت با ثابت نگه داشتن طول و جرم، با افزایش زاویه انحراف آونگ بیرونی بیشتر از 60 درجه (به صورت 10 درجه، 10 درجه) در زاویه 130 درجه پدیده آشوب مشاهده گردید. بنابراین برای دقت بیشتر در زاویه‌ای کمتر از 130 درجه بررسی شد تا نهایتاً در زاویه حدود 128 درجه به عنوان حداقل زاویه پدیده آشوب مشاهده گردید.

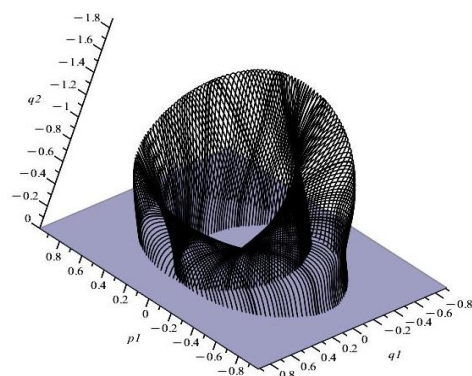
در شکل (14-الف) سطح پوانکاره برای مدت زمان 1800 ثانیه از برخورد خطوط فضای فاز در دو بعد ترسیم شده است. با مشاهده شکل ملاحظه می‌شود که تعداد زیادی نقطه در سرتاسر ناحیه‌ی دایره‌ی شکل پراکنده شده‌اند. وجود چنین نقاطی دلیلی بر گذار از حالت شبه دوره‌ای به حالت آشوبناک است که در زاویه انحراف 128 درجه آونگ بیرونی، اتفاق افتاده است. لازم به ذکر است که برای زوایای کوچکتر از 128 نمی‌توان گفت که رفتار آونگ دوگانه کاملاً شبه دوره‌ای است بلکه حتی در این زاویه‌ها در مواردی پدیده‌ی آشوبناک هم رخ دهد، اما برای زاویه‌های بزرگتر شواهد نشان می‌دهد که رفتار آونگ دوگانه آشوبناک است. همچنین با توجه به سطح انرژی به دست آمده از جدول (1) ملاحظه می‌گردد، مقدار انرژی سیستم در این حالت بالاتر از چهار حالت فوق است.

یکسان نیست. بنابراین در اینجا می‌توان ادعا کرد که رفتار سیستم شبه دوره‌ای بوده که از طریق سطح پوانکاره قابل تشخیص است. نکته‌ی جالب توجه دیگر یکسان نبودن سطح انرژی با حالت قبلی با زاویه انحراف 60 درجه است. مقایسه شکل‌های (12) و (13) نشان می‌دهد که رفتار سیستم نه تنها با تغییر در شرایط اولیه، تغییر می‌کند، بلکه اگر تغییر ساختار فیزیکی سیستم (از جمله طول) می‌تواند رفتار آن را تغییر دهد.

در بررسی چهار حالت فوق پدیده آشوب در سیستم آونگ فیزیکی دوگانه مشاهده نشد، زیرا هر تغییری نمی‌تواند به پدیده آشوبناک منجر شود. بنابراین، در این قسمت حداقل تغییراتی که باعث شروع آشوب در سیستم می‌شود بررسی شده است.

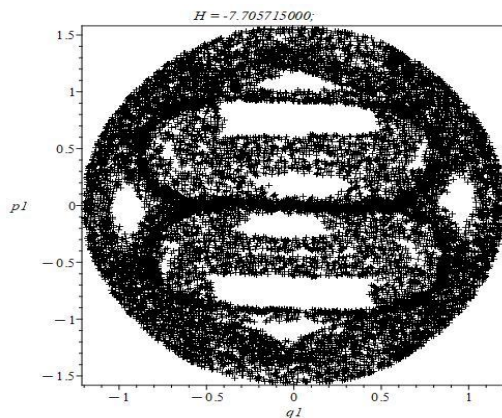
برای اینکه پدیده آشوب رخ دهد باید سطح انرژی آونگ افزایش پیدا کند، افزایش سطح انرژی به تغییر شرایط اولیه (زاویه انحراف، جرم و طول) بستگی دارد. در این مقاله برای به دست آوردن حداقل زاویه‌ی انحراف که در آن سیستم آشوبناک می‌شود، از طریق روش آزمون و خطا استفاده گردید. در ابتدا برای طول و جرم ثابت، سپس دو برابر کردن طول و در نهایت دو برابر کردن طول و جرم آونگ دوم، تا مقداری که سیستم آشوبناک شود زاویه انحراف را افزایش داده و نتایج تجزیه و تحلیل شد.

حالت‌های شبه دوره‌ای اغلب به عنوان انتقال بین رفتار منظم و آشوبناک در سامانه‌های دینامیکی دیده می‌شوند. در آونگ دوگانه، حالت شبه دوره‌ای ممکن است زمانی رخ دهد که انرژی سیستم در حدی باشد که آونگ به اندازه کافی برای ورود به رفتار کاملاً آشوبناک انرژی نداشته باشد، اما هنوز هم انرژی کافی برای جلوگیری از الگوی حرکت ساده و دوره‌ای را داشته باشد (شکل-های (10) تا (13) همچنین جدول (1)).



(الف)

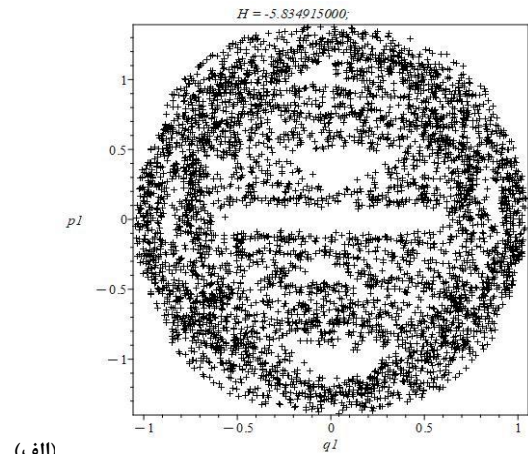
با حالت مشابه (حالت چهارم) ملاحظه شد که سطح انرژی آن بالاتر است، یعنی اینکه، سطح انرژی در زاویه ۸۸ درجه حدود ۲/۳ ژول از حالت چهارم (زاویه ۶۰ درجه) بیشتر است. باملاحظه شکل (۱۵) جزیره‌های در داخل سطح پوانکاره مشاهده می‌شود که دارای تقارن می‌باشند و این خود از وجود نظم خاصی در داخل رفتار آشوبناک حکایت می‌کنند. افزایش مدت‌زمان نوسان تا ۷۲۰۰ ثانیه باعث می‌شود که تقارن جزیره‌ها در داخل شکل مشخص‌تر باشد.



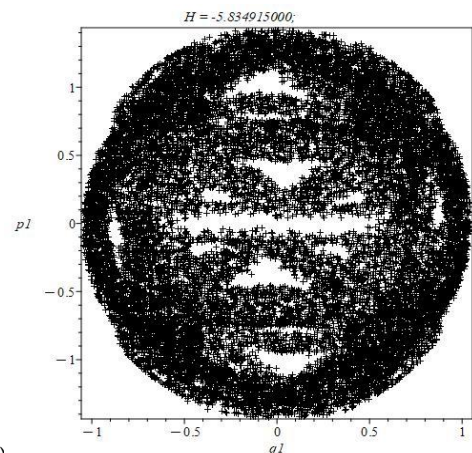
شکل (۱۵). سطح پوانکاره برای زاویه انحراف ۸۸ درجه و مدت‌زمان نوسان ۷۲۰۰ ثانیه ($m_2 = m_1, l_2 = 2l_1$).

3-2-7. حالت هفتم ($m_2 = 2m_1, l_2 = 2l_1$)

در آخرین بحث از پدیده‌های آشوب، در این قسمت حالتی بررسی‌شده که در آن ابتدا طول و جرم آونگ دوم را تا دو برابر افزایش و سپس برای گذار از حالت شبه دوره‌ای به آشوبناک زاویه انحراف افزایش داده شد. با توجه به ساختار آونگ که یکی از بازوهای آن از لحاظ اندازه و طول بزرگ‌تر است انتظار می‌رود که پدیده آشوب در زاویه‌های حدود ۹۰ درجه شروع شود. استخراج نتایج نشان داد که در زاویه ۹۲ درجه پدیده آشوب به‌وضوح خود را نشان می‌دهد (شکل (۱۶)). لازم به یادآوری است که گذار از پدیده دوره‌ای به شبه‌دوره‌ای و یا از شبه‌دوره‌ای به آشوبناک به‌آرامی اتفاق می‌افتد، به عبارت دیگر ممکن است که در زاویه‌ی یکسان هر دو پدید وجود داشته باشد اما یکی از آن‌ها غالب‌تر باشد که با افزایش زاویه پدیده غالب کل سطح را پوشش دهد. بنابراین، در زاویه‌های بیشتر از ۹۲ درجه سیستم رفتار آشوبناک از خود نشان می‌دهد. درواقع تعداد نقاط زیادی در سطح پوانکاره به دلیل برخورد خطوط فضای فاز ایجاد می‌شود، که هر نقطه نشان‌دهنده یک نوسان است و به هیچ‌وجه مکان آن قابل پیش‌بینی نیست. چون تعداد نقاط زیادی در سطح پخش می‌شود بنابراین برای به دست آوردن نتایج بهتر، محاسبات برای سه مدت‌زمانی متفاوت انجام شد.



(الف)



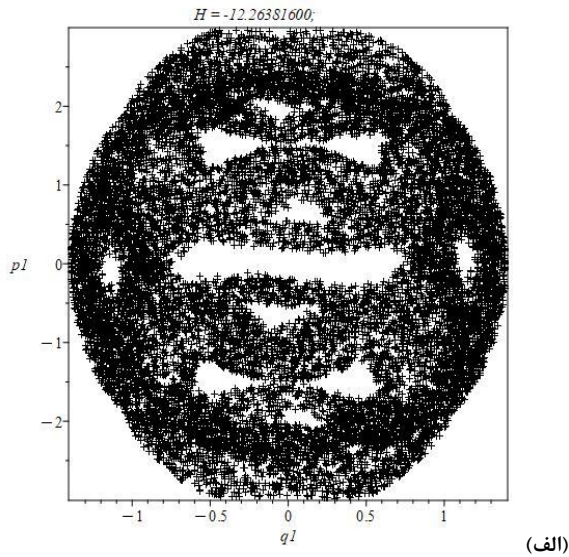
(ب)

شکل (۱۴). سطح پوانکاره برای زاویه ۱۲۸ درجه مدت‌زمان نوسان برای (الف) ۱۸۰۰ ثانیه و برای (ب) ۷۲۰۰ ثانیه ($m_2 = m_1, l_2 = l_1$).

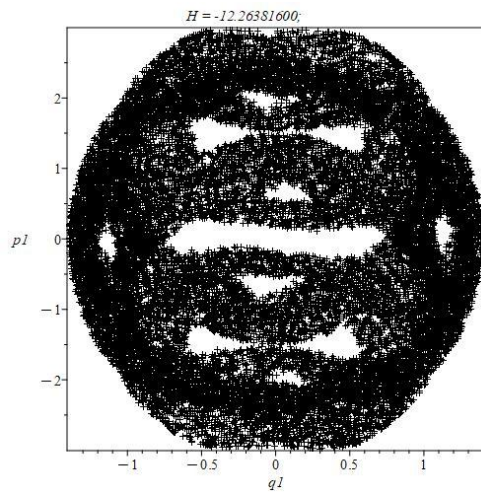
برای اینکه نظم درون پدیده آشوبناک بهتر دیده شود مدت‌زمان نوسان را تا ۷۲۰۰ ثانیه افزایش داده و نتایج استخراج گردید (شکل (۱۴-ب)). با مقایسه شکل‌های (الف) و (ب) مشاهده می‌شود جزیره‌ها که خالی از نقاط هستند به‌طور واضح خود را نشان می‌دهند و با افزایش زمان تقارن آن‌ها نسبت به مرکز به‌طور واضح‌تری قابل‌مشاهده هستند. به عبارت دیگر، با مقایسه این دو حالت می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش مدت‌زمان تراکم نقاط روی سطح پوانکاره بیشتر شده و جزیره‌ها بهتر نمایان می‌شوند.

3-2-6. حالت ششم (زاویه ۸۸ درجه و $l_2 = 2l_1$)

در حالت چهارم (بخش 3-1-4) با وجود افزایش طول آونگ به دو برابر و همچنین افزایش زاویه تا ۶۰ درجه هیچ پدیده آشوبناکی مشاهده نشد بلکه آونگ رفتار شبه دوره‌ای از خود نشان داد. برای اینکه آونگ دوگانه رفتار آشوبناک از خود نشان دهد، زاویه انحراف آونگ بیرونی را برای زاویه‌های بزرگ‌تر موردبررسی قرار گرفت تا اینکه در زاویه ۸۸ درجه پدیده آشوبناک مشاهده گردید (شکل (۱۵)). با مقایسه سطح انرژی



(ب)



شکل (16). سطح پوانکاره برای آونگ فیزیکی دوگانه با زاویه انحراف 92 درجه برای آونگ دومی و مدت‌زمان نوسان، (الف) 3600 ثانیه، (ب) 7200 ثانیه و (ج) 10800 ثانیه ($l_2 = 2l_1$, $m_2 = 2m_1$).

جدول (1). مشخصات آونگ فیزیکی دوگانه و مقادیر سطح انرژی سیستم در موارد مختلف.

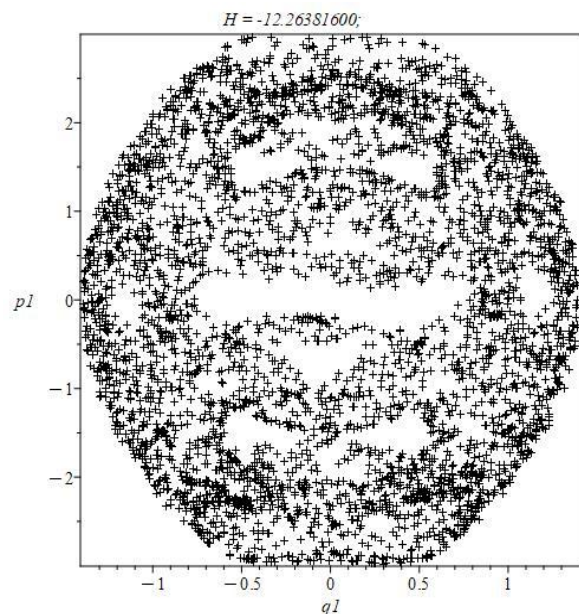
سطح انرژی مکانیکی E[J]	پارامترهای آونگ بیرونی			حالت
	جرم (kg)	طول (m)	زاویه (deg)	
-9/373	1	0/5	12	اول
-9/502	1	0/5	30	دوم
-8/605	1	0/5	60	سوم
-9/987	1	1	60	چهارم
-5/835	1	0/5	128	پنجم*
-7/7057	1	1	88	ششم*
-12/264	2	1	92	هفتم*

* سیستم آشوبناک

شکل (16-الف) سطح پوانکاره با تعداد زیادی نقاط که به‌طور غیریکنواخت پخش شده‌اند، را نشان می‌دهد. این تعداد نقاط روی سطح به دلیل نوسان آونگ فیزیکی دوگانه در طول زمان 3600 ثانیه، ایجاد شده است. با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که تراکم نقاط در روی سطح یکنواخت نیست و در بعضی از قسمت‌ها هیچ نقطه‌ای مشاهده نمی‌شود اما در بعض دیگر از قسمت‌ها تراکم نقاط بیشتر از سایر قسمت‌های دیگر است.

پس از دو ساعت (7200 ثانیه) مشاهده گردید تراکم نقاط بیشتر شده و مناطقی که خالی از نقاط بودند، همچنان خالی از نقاط باقی‌مانده‌اند. با ملاحظه شکل (16-ب) مشاهده گردید که با افزایش زمان مناطق خالی از نقاط خود را به شکل نواحی کوچکی معروف به جزیره نشان می‌دهند.

در شکل (16-ج) برای اینکه جزیره‌ها بیشتر آشکار شوند مدت‌زمان نوسان تا 10800 ثانیه افزایش داده شد. با افزایش زمان تراکم نقاط مناطقی که از عبور فضای فاز حاصل شده بیشتر شده اما جزیره‌های تشکیل همچنان محفوظ و تقارن خود را حفظ کردند. همچنین با افزایش زمان نوسان آونگ، تقارنی که در سطح پوانکاره تشکیل شده از بین نمی‌رود. به عبارت دیگر، برخلاف پدیده‌های کاتوره‌ای که کاملاً تصادفی هستند و هیچ نظم خاصی برای آن‌ها تعریف نمی‌شود، اما در پدیده آشوب نظم خاصی در داخل بی‌نظمی شکل می‌گیرد. بنابراین مشاهده‌ی نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که رفتار منظم در درون یک رفتار آشوبناک قابل توجه است [16].



- [11] V. Tran, E. Brost, M. Johnston, J. Jalkio, Predicting the behavior of a chaotic pendulum with a variable interaction potential, 23 (3), 033103, 2013.
- [12] S. Maiti, J. Roy, A. K. Mallik, J. K. Bhattacharjee, Nonlinear dynamics of a rotating double pendulum, Physics Letters A vol.380 pp. 408-412, 2016.
- [13] J. Roy, A. K. Mallik, J. K. Bhattacharjee, Role of initial conditions in the dynamics of a double pendulum at low energies, vol.73 pp. 993-1004, 2013.
- [14] A. B. Shokri, B. Malek-Alkalmi, H. Heidari, M. Debiqian, S. O. Sobhani, Investigation of Frequency Spectrum and Poincaré Surfaces in Double Pendulum, Iranian Journal of Applied Physics, pp.75-94, 2023, (In Persian).
- [15] G. P. Tolstov, *Fourier series* Courier Corporation, Dover Publication, INC, New York, 2012.
- [16] L. Smith, Chaos: a very short introduction. OUP Oxford: 2007.
- [17] I. Kovacic, M. Zukovic, D. Radomirovic, Normal modes of a double pendulum at low energy levels, Nonlinear Dyn, vol. 99 pp.1893–1908, 2020.
- [18] W. Greiner, & D. A. Bromley, Classical mechanics: systems of particles and Hamiltonian dynamics: Springer, 2003

4- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، تحلیل عددی جامع از تأثیر شرایط اولیه بر رفتار دینامیکی آونگ فیزیکی دوگانه با استفاده از نرم‌افزارهای کامسول و میپل انجام شده است. نتایج به‌دست‌آمده نشان داد که تغییرات شرایط اولیه، از جمله افزایش زاویه انحراف، طول و جرم آونگ بیرونی، می‌تواند رفتار آونگ فیزیکی دوگانه را از حالت دوره‌ای به شبه‌دوره‌ای و در شرایطی که این تغییرات شدید باشد، به رفتار آشوبناک تغییر دهد. علاوه بر این، تحلیل نمودارهای تبدیل فوریه سریع برای هر کدام از موارد مطالعه شده حاکی از آن بود که دو مد نوسانی اصلی وجود دارد. همچنین علاوه بر دو قله‌ی اصلی، قله‌های کوچک‌تری نیز در نمودار تبدیل فوریه مشاهده گردید. در نهایت، از نمودارهای فضا-فاز و سطح پوانکاره برای تفکیک پدیده‌های شبه‌دوره‌ای و آشوبناک از حالت دوره‌ای استفاده گردید. مقایسه نتایج به‌دست‌آمده از مقادیر سطح انرژی، نشان می‌دهد که افزایش سطح انرژی عامل اصلی گذار از حالت شبه‌دوره‌ای به حالت آشوب است. همان‌طور که نتایج نشان می‌دهد که اگر ساختار آونگ دوگانه تغییر کند، یعنی طول و جرم آونگ بیرونی دو برابر شود، نشان می‌دهد که پدیده آشوب می‌تواند در سطح انرژی پایین‌تری نیز رخ دهد.

5- مراجع

- [1] R. G. Newton, Galileo's pendulum. Harvard University Press, 2009.
- [2] M. R. Matthews, C. Gauld, A. J. S. Stinner, Education, The pendulum: Its place in science, culture and pedagogy, vol.13 p., 261-277, 2004.
- [3] M. R. Matthews, C. F. Gauld, A. Stinner, The pendulum: Scientific, historical, philosophical and educational perspectives. Springer Science & Business Media, 2005.
- [4] Pook, L. P., Understanding pendulums: a brief introduction. Springer Science & Business Media, vol. 12, 2011.
- [5] T. Stachowiak, T. J. C. Okada, A numerical analysis of chaos in the double pendulum, Chaos, Solitons & Fractals Vol. 29 pp 417-422, 2006.
- [6] H. Jain, A. Ranjan, K. Gupta, Analysis of chaos in double pendulum, in: 2013 6th International Conference on Emerging Trends in Engineering and Technology, IEEE, 2013
- [7] A.M. Calvão, T.J.P. Penna, The double pendulum: a numerical study, Eur. J. Phys. 36 , 2015.
- [8] N. Sun, Y. Wu, X. Liang, Y. Fang, Nonlinear stable transportation control for double-pendulum shipboard cranes with ship-motion-induced disturbances, IEEE Trans. Industr. Electron. 66 (2019) 9467–9479.
- [9] H. Nagashima, Y. Baba, M. Nakahara, Introduction to chaos: physics and mathematics of chaotic phenomena. CRC Press, 2019.
- [10] J. L. D. Madrid, P. O. Henao, E. G. Querubin, In Dynamic modeling and simulation of an underactuated system, Journal of physics: conference series, IOP Publishing, 2017.